Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

11. Juli 2001

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 5 – Lösungen

Aufgabe 28

In jeder Stufe wird höchstens ein neuer Verfolger ernannt. Deshalb gibt es in jeder Stufe höchstens endlich viele aktuelle oder entlassene Verfolger. Also sind die Relationen

$\mathit{ernannt}_s(x, e, t)$	„x wurde in Stufe $t \leq s$ zum Verfolger von e ernannt“
$\mathit{entlassen}_s(x, t)$	„Verfolger x wurde in Stufe $t \leq s$ entlassen“

endlich und nach Church's These können kanonische Indizes für $\mathit{ernannt}_s$ und $\mathit{entlassen}_s$ uniform in s berechnet werden. Außerdem ist die Funktion

$$\mathit{max\_verfolger}(s) := \max\{x\colon\ (\exists t \leq s)(\exists e \leq s)[\mathit{ernannt}_s(x, e, t)]\}$$

total berechenbar.

(a) **Behauptung:** Das Maximum in $(*)$ existiert immer und kann effektiv berechnet werden.

Beweis: In jeder Stufe werden nur in Mengen A_x, so daß x bereits zum Verfolger ernannt wurde, also nur für endlich viele x, Elemente aufgezählt — und zwar jeweils höchstens endlich viele. Ein kanonischer Index von $A_{x,s}$ ist uniform aus x und s berechenbar (Church's These). Also ist

$$B_s := \max \bigcup_{z \in \mathbb{N}} A_{z,s} = \max \bigcup_{z \leq \mathit{max\_verfolger}(s)} A_{z,s}$$

endlich und ein kanonischer Index für B_s kann uniform in s berechnet werden. Daher existiert $\max B_s$ und kann effektiv berechnet werden.

(b) **Behauptung:** Die Relation „*x ist nach Stufe s Verfolger von* e“ ist total berechenbar und der Schritt *Ernennen* kann immer effektiv durchgeführt werden.

Beweis: x ist in Stufe s Verfolger von e, gdw.

$$(\exists t \leq s)[\mathit{ernannt}_s(x, e, t) \wedge (\forall t')[t \leq t' \leq s \Rightarrow \neg \mathit{entlassen}_s(x, t)]].$$

Ein neuer Verfolger kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\mu x[(\forall t \leq s)(\forall e \leq s)[\neg \mathit{ernannt}_s(x, e, t)]]$$

Da die Relation $\mathit{ernannt}_s$ endlich ist, wird immer ein solches x gefunden.

(c) **Behauptung:** $A = \{(x,a)\colon\ a \in A_x\}$ ist r.a.

Beweis: Alle A_x, s sind endlich, und kanonische Indizes können aus x, s berechnet werden. Sei $h \in R_2$ mit $(\forall x,s)[A_{x,s} = D_{h(x,s)}]$. Dann ist

$$A = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \{(x,a)\colon\ a \in A_{x,s}\} = \{(x,a)\colon\ (\exists s)[a \in D_{h(x,s)}]\} \text{ r.a.}$$

(d) **Behauptung:** Jedes e hat in jeder Stufe höchstens einen Verfolger.

Beweis: Verfolger werden nur in Stufe 0 und im Schritt *Ernennen* ernannt. In Stufe 0 wird nur ein Verfolger ernannt, daher gilt die Behauptung. Im Schritt *Ernennen* erhält ein e nur dann einen neuen Verfolger, wenn es vorher keinen besaß. Demnach gilt die Behauptung für Stufe $s+1$, wenn sie für Stufe s gilt, und damit durch Induktion in jeder Stufe.

(e) **Behauptung:** Jedes x wird genau einmal zu einem Verfolger ernannt.

Beweis: Kein x wird zweimal zu einem Verfolger ernannt, da im Schritt *Ernennen* immer ein x ausgewählt wird, das noch nie Verfolger war.

Wegen $e = s_{.1}$ im Schritt *Ernennen* erhält jedes e mindestens einmal einen Verfolger. Daher werden unendlich viele Verfolger ernannt. Da immer das kleinste bislang nicht ernannte x gewählt wird, wird jedes x einmal ernannt.

(f) **Behauptung:** Jedes e besitzt genau einen Verfolger, der nie entlassen wird, oder ∞ viele Verfolger, die alle entlassen werden.

Zu lesen: Entweder es gibt unter den Verfolgern von e genau einen, der nie entlassen wird, oder es gibt unendlich viele, die alle entlassen werden.

Beweis: Wenn es einen Verfolger von e gibt, der nie entlassen wird, dann folgt die Eindeutigkeit aus (d).

Andernfalls wird jeder Verfolger von e ein einer Stufe s_e entlassen. Auf diese Stufe folgt aber eine Stufe $s \geq s_e$ mit $s_{.1} = e$, in der ein neuer Verfolger ernannt wird. Da auch dieser wieder entlassen wird, u.s.w., werden insgesamt unendlich viele Verfolger ernannt.

(g) **Behauptung:** $(\forall e)(\exists x)[W_e = A_x]$

Beweis: Wir zeigen die Aussage für minimale Indizes, d.h. für e mit

$$(\forall i < e)[W_i \neq W_e] \quad .$$

Für alle anderen e folgt die Aussage, da es einen minimalen Index $e' < e$ gibt mit $W_e = W_{e'}$.

Wir unterscheiden zwischen den in (f) identifizierten Fällen:

Fall 1: e besitzt Verfolger x, der nie entlassen wird.
Wenn x in Stufe t ernannt wird, gilt für $s \geq t$: $A_{x,s} = W_{e,s}$. Daher gilt für die Vereinigung $W_e = A_x$.

Fall 2: e besitzt ∞ viele Verfolger, die alle entlassen werden.

Da e minimal ist, gilt $(\forall i < e)[W_i \neq W_e]$. Da dies aber nur endlich viele Mengen W_i sind, muß es ein z geben, bis zu dem sich diese Mengen bereits unterscheiden:

$$(\exists z)(\forall i < e)[W_i \cap \{0, \ldots, z\} \neq W_e \cap \{0, \ldots, z\}] \quad .$$

In den endlichen Approximationen von W_i und W_e gibt es nun eine Stufe t_0, bis zu der alle Elemente $\leq z$ aufgezählt sind, also $W_{i,t_0} \cap \{0, \ldots, z\} = W_i \cap \{0, \ldots, z\}$, und entsprechend für W_e. Es gilt also

$$(\exists t_0)(\forall s \geq t_0)(\exists z)(\forall i < e)[W_{i,s} \cap \{0, \ldots, z\} \neq W_{e,s} \cap \{0, \ldots, z\}] \quad .$$

Zu e kann es nur endlich viele Verfolger $\leq z$ geben, und diese werden alle irgendwann entlassen. Sei $t \geq t_0$, so daß alle Verfolger $\leq z$ von e bis Stufe t entlassen wurden. Damit sind alle in einer Stufe $s \geq t$ alle entlassenen Verfolger x von e größer als z, also erst recht

$$(\forall i < e)[W_{i,s} \cap \{0, \ldots, x\} \neq W_{e,s} \cap \{0, \ldots, z\}] \quad .$$

Es folgt, daß nach Stufe t Verfolger von e höchstens wegen Bedingung 2 entlassen werden.

Fall 2 a: W_e ist endlich.
$\Longrightarrow$ $(\exists t')[W_e = W_{e,t'}]$.

Sei $s \geq t, t'$, so daß in Stufe s der aktuelle Verfoger von e entlassen wird (wegen (b)). Dann gibt es einen bereits entlassenen Verfolger y mit $A_{y,s} = W_{e,s}$. Zusammen:

$$\left.\begin{array}{rcr} & & A_{y,s} = W_{e,s} \\ s \geq t' & \Rightarrow & W_{e,s} = W_e \\ y \text{ entlassen} & \Rightarrow & A_y = A_{y,s} \end{array}\right\} A_y = W_e \quad .$$

Fall 2 b: W_e ist unendlich.
Weil Verfolger von e unendlich oft wegen Bedingung (b) entlassen werden, existieren Folgen $s_1 < s_2 < \ldots$ mit $A_{y_i,s_i} = W_{e,s_i}$ für irgendwelche bereits entlassenen y_i. Da W_e unendlich ist, müssen die W_{e,s_i} immer größer werden, andererseits haben alle A_{y_i,s_i} für bereits entlassene y_i die Form $\{0, \ldots, c_i\}$ für gewisse c_i. Es ist also $c_1 < c_2 < \cdots$. Daraus folgt

$$W_e = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_{e,s_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{0, \ldots, c_i\} = \mathbb{N} \quad .$$

Der minimale Index von $\mathbb{N}$ ist aber 0, und 0 hat den Verfolger 0, der nie entlassen wird. *Widerspruch!*

Damit ist die Behauptung beweisen. Übrigens hat sich dabei gezeigt, daß der Fall 2 (unendlich viele entlassene Verfolger) nur für nicht minimale Indizes oder für Indizes von Anfangsabschnitten $\{0, \ldots, c\}$ auftreten kann.

(h) **Behauptung:** $(\forall x, y)[x \neq y \implies A_x \neq A_y]$

Beweis: Seien x, y mit $x \neq y$ beliebig. Laut (e) werden beide einmal zu einem Verfolger ernannt.

Fall 1: x und y werden nie entlassen, d.h. es gibt e, i mit $A_x = W_e$ und $A_y = W_i$. Nach (f) folgt $e \neq i$. O.B.d.A. sei $i < e$.

Annahme: $A_x = A_y$
Dann ist $W_e = W_i$. Ab einer gewissen Stufe in der Approximation sind die Anfangsabschnitte bis x stabil, also

$$(\exists t)(\forall s \geq t)[W_{i,s} \cap \{0, \ldots, x\} = W_{e,s} \cap \{0, \ldots, x\}].$$

Daher wird x spätestens in Stufe t (wegen (a)) entlassen. *Widerspruch!*.

Fall 2: x und y werden entlassen.
Falls x und y in der selben Stufe entlassen werden, dann ist $A_x = \{0, \ldots, x + b\}$, $A_y = \{0, \ldots, y + b\}$, also $A_x \neq A_y$ da $x \neq y$.

Falls x nach y entlassen wird, etwa in Stufe s, dann ist b in Stufe s A_x aber nicht in A_y enthalten. Also ist $A_x \neq A_y$. Analoges gilt falls y nach x entlassen wird.

Fall 3: y wird entlassen, aber x nicht.
x sei Verfolger von e.

Annahme: $A_x = A_y$
Dann ist A_y endlich und damit $y \neq 0$, da $A_0 = W_0 = \mathbb{N}$. Also existiert eine Stufe t, in der y bereits entlassen ist mit $A_{y,s} = A_{x,s} = W_{e,s}$. Damit wird x spätestens in Stufe t (wegen (b)) entlassen. *Widerspruch!*

Fall 4: x wird entlassen, aber y nicht.
Analog zu Fall 3. □

Noch eine Bitte: Falls ihr auf den Übungsblättern oder in den Musterlösungen Fehler findet, oder falls ihr andere, evetentuell schönere Lösungen findet, teilt sie mir bitte mit.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`