**Universität Karlsruhe**
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
*Prof. Dr. W. Menzel*
*Martin Giese*

27. Juni 2001

# Berechenbarkeit SS 01
## Übungsblatt 4 – Lösungen

### Aufgabe 20

Sei $\mathit{Fin} := \{i\colon W_i \text{ endlich}\}$.

$K \leq_m \mathit{Fin}$ via $f \in R_1$ mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } \neg Tixi, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$

$K^C \leq_m \mathit{Fin}$ via $g \in R_1$ mit $\varphi_{g(i)} := \lambda x.\varphi_i(i)$.

### Aufgabe 21

Wähle im folgenden mit Hilfe des Substitutionstheorems injektive Funktionen $f, g, h$:

$A \leq_1 B$ via $f \in R_1$ mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x.\mu y[\varphi_{i,y\cdot 1}(y\cdot 2) = x]$.

$B \leq_1 C$ via $g \in R_1$ mit $\varphi_{g(i)} := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall y \leq x)[\varphi_i(y)\downarrow], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$

$C \leq_1 A$ via $h \in R_1$ mit $\varphi_{h(i)} := \lambda x.\begin{cases} x & \text{falls } (\exists t)[\#W_{i,t} > x], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$

### Aufgabe 22

(a) Wir konstruieren eine Kreation zu $A := \{i\colon W_i \cap 2\mathbb{N} \neq \emptyset\}$ in Analogie zum Beweis von Lemma 4.18.

Es ist $K \leq_m A$ via $f$ mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x.\varphi_i(i)$, d.h. $f^{-1}(A) = K$. $K$ besitzt die Kreation $\lambda i.i$.

Sei nun $j$ mit $A \cap W_j = \emptyset$ beliebig. Dann gilt $K \cap f^{-1}(W_j) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(W_j) = \emptyset$. Weil $\lambda i.i$ Kreation zu $K$ ist, liegt jedes $e$ mit $W_e = f^{-1}(W_j)$ nicht in $K \cup f^{-1}(W_j)$ und damit $f(e)$ nicht in $A \cup W_j$.

Wählen wir $g \in R_1$ mit $(\forall j)[W_{g(j)} = f^{-1}(W_j)]$ (siehe Aufgabe 13 (b)), dann ist $f \circ g$ Kreation zu $A$. □

(b) **Behauptung:** $\neg(\exists h \in P_1)(\forall i)[W_i \text{ kreativ} \implies h(i)\downarrow \wedge\, \varphi_{h(i)} \text{ ist Kreation zu } W_i]$

**Behauptung:** *Annahme*: $h$ mit obiger Eigenschaft existiert.
Wähle $a \in \mathbb{N}$ mit $W_a = \emptyset$. Wir definieren $f \in R_1$ durch

$$W_{f(i)} := \begin{cases} K \cup \{\varphi_{h(i)}(a)\} & \text{falls } \varphi_{h(i)}(a)\downarrow, \\ K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $i$ ist $W_{f(i)} \equiv_m K$, also $W_{f(i)}$ kreativ. Nach dem Rekursionstheorem existiert ein $e$ mit $W_e = W_{f(e)}$. Weil $W_e$ kreativ ist und $W_e \cap W_a = \emptyset$, folgt

$$h(e)\downarrow \wedge\, \varphi_{h(e)}(a)\downarrow \notin W_e \cup W_a,$$

d.h. $\varphi_{h(e)}(a)\downarrow \notin W_{f(e)}$. *Widerspruch*! □

## Aufgabe 23

(a) Es gilt $K^C \leq_m \mathit{Tot} := \{i\colon \varphi_i \text{ total}\}$ via $f \in R_1$ mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } \neg Tixi, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$
und $K^C \leq_m \mathit{Tot}^C$ via $g$ mit $\varphi_{g(i)} := \lambda x.\varphi_i(i)$. Also sind $\mathit{Tot}$ und $\mathit{Tot}^C$ produktiv.

(b) Es gilt $K^C \leq_m L := \{i\colon W_i = \emptyset\}$ via $g$ aus Teilaufgabe (a), d.h. $L$ ist produktiv. $L^C$ ist r.a., also nicht produktiv.

(c) Die Post'sche simple Menge $S$ ist r.a. und damit nicht produktiv. $S^C$ ist nicht produktiv, weil $S^C$ keine unendliche r.a. Teilmenge enthält.

## Aufgabe 24

**Behauptung:** Jede Indexmenge $I$ erfüllt mindestens eine der folgenden Bedingungen:

(a) $I = \emptyset$,

(b) $I = \mathbb{N}$,

(c) $I$ ist produktiv,

(d) $I^C$ ist produktiv.

**Beweis:** Sei $I \neq \emptyset$ und $I \neq \mathbb{N}$, und $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_a = \lambda x.\uparrow$.

*Fall 1*: $a \in I$. Wähle ein beliebiges $b \in I^C$ und definiere $f \in R_1$ durch

$$\varphi_{f(i)} := \lambda x.\begin{cases} \varphi_b(x) & \text{falls } \varphi_i(i)\downarrow, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\varphi_{f(i)} = \begin{cases} \varphi_b & \text{falls } i \in K, \\ \varphi_a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also $K \leq_m I^C$ via $f$. Also ist $K^C \leq_m I$ und damit $I$ produktiv.

*Fall 2*: $a \notin I$. Analog zu Fall 1 erhält man $K^C \leq_m I^C$ und damit, daß $I^C$ produktiv ist. □

## Aufgabe 25

Sei $A$ simpel.

**Behauptung:** $B := A \oplus \emptyset = \{2x : x \in A\}$ ist nicht simpel, nicht entscheidbar, nicht kreativ und kein Zylinder.

**Beweis:** Wegen $\{2x+1 \colon x \in \mathbb{N}\} \subseteq B^C$ ist $B$ nicht simpel.

Offensichtlich ist $A \equiv_m B$ und damit $B$ nicht entscheidbar und nicht kreativ, weil $A$ nicht entscheidbar und nicht kreativ ist.

Bleibt zu zeigen: $B$ ist kein Zylinder.

*Annahme*: $\langle B, \mathbb{N}\rangle \leq_1 B$ via einem $f \in R_1$.
Dann gilt für alle $x$:

$$x \in A \iff 2x \in B \iff (\forall n)[f(\langle 2x, n\rangle) \in B].$$

Sei $c \notin A$ beliebig. Dann ist $C := \{f(\langle 2c, n\rangle) \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche r.a. Teilmenge von $B^C$. Wäre $C \subseteq 2\mathbb{N}$, dann wäre $\frac{1}{2}C$ eine unendliche r.a. Teilmenge von $A^C$. Eine solche gibt es aber nicht, weil $A$ simpel ist. Also gilt $C \cap (2\mathbb{N}+1) \neq \emptyset$.

Für alle $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(\langle 2a, n\rangle) \in B$, also gerade.

Es folgt $A^C = \{x : (\exists n)[f(\langle 2x, n\rangle) \text{ ungerade}]\}$, d.h. $A^C$ ist rekursiv aufzählbar. *Widerspruch*! $\square$

## Aufgabe 26

(a) Sei $c \notin A \cup \{0\}$ beliebig. $c$ existiert, weil $A$ simpel und damit $A^C$ unendlich ist. Dann gilt $A \leq_m A \cup \{0\}$ via $\lambda x. \begin{cases} c & \text{falls } x = 0, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$ $\square$

(b) $A \leq_1 A \cup \{0\}$ gilt nicht:
*Annahme*: $A \leq_1 A \cup \{0\}$ via $f \in R_1$.
$0 \notin A \implies f(0) \notin A \cup \{0\} \implies f(f(0)) \notin A \cup \{0\} \implies \ldots \overset{\text{Vollst. Induktion}}{\implies} (\forall n) f^n(0) \notin A \cup \{0\}$.
$\implies \forall n > 0 : f^n(0) \neq 0 \overset{f \text{ injektiv}}{\implies} f^{n+1}(0) \neq f(0) \implies \ldots \overset{\text{Vollst. Induktion}}{\implies} (\forall m)[f^{n+m} \neq f^m(0)]$
$\implies \{f^n(0) \colon n \in \mathbb{N}\}$ ist unendliche r.a. Teilmenge von $A^C$. *Widerspruch*! $\square$

## Aufgabe 27

Wir konstruieren eine simple Menge $A$ durch endliche Approximation:

*Stufe* 0: $A_0 := \emptyset$.

*Stufe* $s+1$: Sei $A_s^C = \{a_0^s < a_1^s < \ldots\}$. Beachte, daß $A_s^C$ coendlich und uniform in $s$ entscheidbar ist.

Suche das kleinste $e \leq s$, so daß

$$W_{e,s} \cap A_s = \emptyset \wedge (\exists n \geq e)[a_n^s \in W_{e,s}].$$

*Bemerkung:* Die erste Bedingung zielt auf die Anforderung $P_e$ ab, die zweite auf $N_e$. Die zweite Bedingung ist entscheidbar, weil $W_{e,s}$ endlich ist.

Falls $e$ existiert, wählen wir das minimale $n \geq e$ mit $a_n^s \in W_{e,s}$ und setzen $A_{s+1} := A_s \cup \{a_n^s\}$. Andernfalls setzen wir $A_{s+1} := A_s$.
*Ende von Stufe* $s + 1$.

Es ist klar, daß jede Stufe effektiv ausführbar ist und terminiert. Also ist $A$, weil durch endliche Approximation erzeugt, rekursiv aufzählbar.

**Behauptung:** $P_e$ und $N_e$ werden für alle $e$ erfüllt.

**Beweis:** Für beliebiges $i$ gilt wegen der Stufenkonstruktion:

$$(\exists s_i)[W_i \cap A \neq \emptyset \implies W_{i,s_i} \cap A_{s_i} \neq \emptyset],$$

Sei nun $e$ beliebig. Indem man $s_i$ für $i < e$ maximiert, findet man ein $s$, so daSS gilt:

$$(\forall i < e)[W_i \cap A \neq \emptyset \implies W_{i,s} \cap A_s \neq \emptyset], \tag{1}$$

bzw.

$$(\forall i < e)[W_{i,s} \cap A_s = \emptyset \implies W_i \cap A = \emptyset]. \tag{2}$$

Nach Stufe $s$ wird kein $a_i^s$ mit $i < e$ mehr in $A$ aufgezählt, das heiß falls $i < e$, und $A_{t+1} = A_t \cup \{a_j^t\}$ für $t \geq s$, ist $a_i^s \neq a_j^t$. Denn angenommen $a_i^s = a_j^t$. Wenn $a_j^t$ in Stufe $t \geq s$ aufgenommen wird, gibt es laut Definition des Algorithmus ein (minimales) $e'$ mit

$$W_{e',t} \cap A_t = \emptyset \wedge j \geq e' \wedge a_j^t \in W_{e',t}.$$

Da die Mengen in der Stufenkonstruktion immer größer werden, folgt aus $W_{e',t} \cap A_t = \emptyset$ erst recht $W_{e',s} \cap A_s = \emptyset$. Nun gilt $e > i$, und ferner $i \geq j$ (da das Komplement $A_s^c$ immer kleiner wird, müssen die Indizes eines gegebenen Elements abnehmen), und $j \geq e'$, also insgesamt $e' < e$. Damit liefert aber (2): $W_{e'} \cap A = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch, denn laut Annahme sollte $a_i^s = a_j^t \in W_{e',t} \subseteq W_{e'}$ in $A$ aufgenommen werden.
Es folgt

$$\{a_0^s, \ldots, a_{e-1}^s\} \in A^C \tag{3}$$

und damit $\#A^C \geq e$. Also wird $N_e$ erfüllt.

*Annahme*: $P_e$ wird nicht erfüllt, d.h. $W_e$ ist unendlich $\wedge\, W_e \cap A = \emptyset$.
Weil $W_e$ unendlich ist, gilt

$$(\exists x \in W_e)[x > a_{e-1}^s].$$

Wegen der Stufenkonstruktion existiert also ein $t \leq s$ mit:

$$(\exists x \in W_{e,t})[x > a_{e-1}^s \overset{(3)}{=} a_{e-1}^t].$$

Dabei vereinbaren wir $a_{-1}^s = -1$. Wegen $W_e \cap A = \emptyset$ ist $W_{e,t} \cap A_t = \emptyset$ und damit $x \notin A_t$. Weil $x > a_{e-1}^t$ gewählt wurde, existiert ein $n \geq e$ mit $a_n^t = x$. Zusammen also:

$$W_{e,t} \cap A_t = \emptyset \wedge (\exists n \geq e)[a_n^t \in W_{e,t}].$$

Wenn wir nun noch zeigen, daß $e$ mit dieser Eigenschaft minimal ist, so sind wir fertig, weil dann im Algorithmus $a_n^t$ in Stufe $t$ in $A$ aufgenommen wird, im Widerspruch zur Annahme $W_e \cap A = \emptyset$.

Angenommen also, es gäbe $e' < e$ mit $W_{e',t} \cap A_t = \emptyset$, etc. Wegen $s \leq t$ gilt dann erst recht $W_{e',s} \cap A_s = \emptyset$, und damit wegen (2) und $e' < e$: $W_{e'} \cap A = \emptyset$. Dann kann aber kein Element aus $W_{e'}$ in $A$ aufgenommen worden sein, was der Annahme widerspricht, daß die Bedingung des Algorithmus für $e'$ erfüllt waren.

**Noch eine Bitte:** Falls ihr auf den Übungsblättern oder in den Musterlösungen Fehler findet, oder falls ihr andere, evetentuell schönere Lösungen findet, teilt sie mir bitte mit.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

*Martin Giese*: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`