



Berechenbarkeit SS 01 Übungsblatt 4 – Lösungen

Aufgabe 20

Sei $Fin := \{i : W_i \text{ endlich}\}$.

$$K \leq_m Fin \text{ via } f \in R_1 \text{ mit } \varphi_{f(i)} := \lambda x. \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg Tixi, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$K^C \leq_m Fin \text{ via } g \in R_1 \text{ mit } \varphi_{g(i)} := \lambda x. \varphi_i(i).$$

Aufgabe 21

Wähle im folgenden mit Hilfe des Substitutionstheorems injektive Funktionen f, g, h :

$$A \leq_1 B \text{ via } f \in R_1 \text{ mit } \varphi_{f(i)} := \lambda x. \mu y [\varphi_{i,y.1}(y.2) = x].$$

$$B \leq_1 C \text{ via } g \in R_1 \text{ mit } \varphi_{g(i)} := \lambda x. \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall y \leq x) [\varphi_i(y) \downarrow], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$C \leq_1 A \text{ via } h \in R_1 \text{ mit } \varphi_{h(i)} := \lambda x. \begin{cases} x & \text{falls } (\exists t) [\#W_{i,t} > x], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 22

- (a) Wir konstruieren eine Kreation zu $A := \{i : W_i \cap 2\mathbb{N} \neq \emptyset\}$ in Analogie zum Beweis von Lemma 4.18.

Es ist $K \leq_m A$ via f mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x. \varphi_i(i)$, d.h. $f^{-1}(A) = K$. K besitzt die Kreation $\lambda i. i$.

Sei nun j mit $A \cap W_j = \emptyset$ beliebig. Dann gilt $K \cap f^{-1}(W_j) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(W_j) = \emptyset$. Weil $\lambda i. i$ Kreation zu K ist, liegt jedes e mit $W_e = f^{-1}(W_j)$ nicht in $K \cup f^{-1}(W_j)$ und damit $f(e)$ nicht in $A \cup W_j$.

Wählen wir $g \in R_1$ mit $(\forall j) [W_{g(j)} = f^{-1}(W_j)]$ (siehe Aufgabe 13 (b)), dann ist $f \circ g$ Kreation zu A . □

- (b) **Behauptung:** $\neg(\exists h \in P_1)(\forall i) [W_i \text{ kreativ} \implies h(i) \downarrow \wedge \varphi_{h(i)} \text{ ist Kreation zu } W_i]$

Behauptung: *Annahme:* h mit obiger Eigenschaft existiert.

Wähle $a \in \mathbb{N}$ mit $W_a = \emptyset$. Wir definieren $f \in R_1$ durch

$$W_{f(i)} := \begin{cases} K \cup \{\varphi_{h(i)}(a)\} & \text{falls } \varphi_{h(i)}(a) \downarrow, \\ K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle i ist $W_{f(i)} \equiv_m K$, also $W_{f(i)}$ kreativ. Nach dem Rekursionstheorem existiert ein e mit $W_e = W_{f(e)}$. Weil W_e kreativ ist und $W_e \cap W_a = \emptyset$, folgt

$$h(e) \downarrow \wedge \varphi_{h(e)}(a) \downarrow \notin W_e \cup W_a,$$

d.h. $\varphi_{h(e)}(a) \downarrow \notin W_{f(e)}$. *Widerspruch!* □

Aufgabe 23

- (a) Es gilt $K^C \leq_m Tot := \{i : \varphi_i \text{ total}\}$ via $f \in R_1$ mit $\varphi_{f(i)} := \lambda x. \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg Tixi, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$
und $K^C \leq_m Tot^C$ via g mit $\varphi_{g(i)} := \lambda x. \varphi_i(i)$. Also sind Tot und Tot^C produktiv.
- (b) Es gilt $K^C \leq_m L := \{i : W_i = \emptyset\}$ via g aus Teilaufgabe (a), d.h. L ist produktiv. L^C ist r.a., also nicht produktiv.
- (c) Die Post'sche simple Menge S ist r.a. und damit nicht produktiv. S^C ist nicht produktiv, weil S^C keine unendliche r.a. Teilmenge enthält.

Aufgabe 24

Behauptung: Jede Indexmenge I erfüllt mindestens eine der folgenden Bedingungen:

- (a) $I = \emptyset$,
- (b) $I = \mathbb{N}$,
- (c) I ist produktiv,
- (d) I^C ist produktiv.

Beweis: Sei $I \neq \emptyset$ und $I \neq \mathbb{N}$, und $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_a = \lambda x. \uparrow$.

Fall 1: $a \in I$. Wähle ein beliebiges $b \in I^C$ und definiere $f \in R_1$ durch

$$\varphi_{f(i)} := \lambda x. \begin{cases} \varphi_b(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \downarrow, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\varphi_{f(i)} = \begin{cases} \varphi_b & \text{falls } i \in K, \\ \varphi_a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also $K \leq_m I^C$ via f . Also ist $K^C \leq_m I$ und damit I produktiv.

Fall 2: $a \notin I$. Analog zu Fall 1 erhält man $K^C \leq_m I^C$ und damit, daß I^C produktiv ist. □

Aufgabe 25

Sei A simpel.

Behauptung: $B := A \oplus \emptyset = \{2x : x \in A\}$ ist nicht simpel, nicht entscheidbar, nicht kreativ und kein Zylinder.

Beweis: Wegen $\{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\} \subseteq B^C$ ist B nicht simpel.

Offensichtlich ist $A \equiv_m B$ und damit B nicht entscheidbar und nicht kreativ, weil A nicht entscheidbar und nicht kreativ ist.

Bleibt zu zeigen: B ist kein Zylinder.

Annahme: $\langle B, \mathbb{N} \rangle \leq_1 B$ via einem $f \in R_1$.

Dann gilt für alle x :

$$x \in A \iff 2x \in B \iff (\forall n)[f(\langle 2x, n \rangle) \in B].$$

Sei $c \notin A$ beliebig. Dann ist $C := \{f(\langle 2c, n \rangle) : n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche r.a. Teilmenge von B^C . Wäre $C \subseteq 2\mathbb{N}$, dann wäre $\frac{1}{2}C$ eine unendliche r.a. Teilmenge von A^C . Eine solche gibt es aber nicht, weil A simpel ist. Also gilt $C \cap (2\mathbb{N} + 1) \neq \emptyset$.

Für alle $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(\langle 2a, n \rangle) \in B$, also gerade.

Es folgt $A^C = \{x : (\exists n)[f(\langle 2x, n \rangle) \text{ ungerade}]\}$, d.h. A^C ist rekursiv aufzählbar. *Widerspruch!* $\square$

Aufgabe 26

(a) Sei $c \notin A \cup \{0\}$ beliebig. c existiert, weil A simpel und damit A^C unendlich ist. Dann

$$\text{gilt } A \leq_m A \cup \{0\} \text{ via } \lambda x. \begin{cases} c & \text{falls } x = 0, \\ x & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

(b) $A \leq_1 A \cup \{0\}$ gilt nicht:

Annahme: $A \leq_1 A \cup \{0\}$ via $f \in R_1$.

$$0 \notin A \implies f(0) \notin A \cup \{0\} \implies f(f(0)) \notin A \cup \{0\} \implies \dots \xrightarrow{\text{Vollst. Induktion}} (\forall n) f^n(0) \notin A \cup \{0\}.$$

$$\implies \forall n > 0 : f^n(0) \neq 0 \xrightarrow{f \text{ injektiv}} f^{n+1}(0) \neq f(0) \implies \dots \xrightarrow{\text{Vollst. Induktion}} (\forall m)[f^{n+m} \neq f^m(0)]$$

$$\implies \{f^n(0) : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist unendliche r.a. Teilmenge von } A^C. \text{ Widerspruch!} \quad \square$$

Aufgabe 27

Wir konstruieren eine simple Menge A durch endliche Approximation:

Stufe 0: $A_0 := \emptyset$.

Stufe $s + 1$: Sei $A_s^C = \{a_0^s < a_1^s < \dots\}$. Beachte, daß A_s^C coendlich und uniform in s entscheidbar ist.

Suche das kleinste $e \leq s$, so daß

$$W_{e,s} \cap A_s = \emptyset \wedge (\exists n \geq e)[a_n^s \in W_{e,s}].$$

Bemerkung: Die erste Bedingung zielt auf die Anforderung P_e ab, die zweite auf N_e . Die zweite Bedingung ist entscheidbar, weil $W_{e,s}$ endlich ist.

Falls e existiert, wählen wir das minimale $n \geq e$ mit $a_n^s \in W_{e,s}$ und setzen $A_{s+1} := A_s \cup \{a_n^s\}$. Andernfalls setzen wir $A_{s+1} := A_s$.

Ende von Stufe $s + 1$.

Es ist klar, daß jede Stufe effektiv ausführbar ist und terminiert. Also ist A , weil durch endliche Approximation erzeugt, rekursiv aufzählbar.

Behauptung: P_e und N_e werden für alle e erfüllt.

Beweis: Für beliebiges i gilt wegen der Stufenkonstruktion:

$$(\exists s_i)[W_i \cap A \neq \emptyset \implies W_{i,s_i} \cap A_{s_i} \neq \emptyset],$$

Sei nun e beliebig. Indem man s_i für $i < e$ maximiert, findet man ein s , so daß gilt:

$$(\forall i < e)[W_i \cap A \neq \emptyset \implies W_{i,s} \cap A_s \neq \emptyset], \quad (1)$$

bzw.

$$(\forall i < e)[W_{i,s} \cap A_s = \emptyset \implies W_i \cap A = \emptyset]. \quad (2)$$

Nach Stufe s wird kein a_i^s mit $i < e$ mehr in A aufgezählt, das heißt falls $i < e$, und $A_{t+1} = A_t \cup \{a_j^t\}$ für $t \geq s$, ist $a_i^s \neq a_j^t$. Denn angenommen $a_i^s = a_j^t$. Wenn a_j^t in Stufe $t \geq s$ aufgenommen wird, gibt es laut Definition des Algorithmus ein (minimales) e' mit

$$W_{e',t} \cap A_t = \emptyset \wedge j \geq e' \wedge a_j^t \in W_{e',t}.$$

Da die Mengen in der Stufenkonstruktion immer größer werden, folgt aus $W_{e',t} \cap A_t = \emptyset$ erst recht $W_{e',s} \cap A_s = \emptyset$. Nun gilt $e > i$, und ferner $i \geq j$ (da das Komplement A_s^c immer kleiner wird, müssen die Indizes eines gegebenen Elements abnehmen), und $j \geq e'$, also insgesamt $e' < e$. Damit liefert aber (2): $W_{e'} \cap A = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch, denn laut Annahme sollte $a_i^s = a_j^t \in W_{e',t} \subseteq W_{e'}$ in A aufgenommen werden.

Es folgt

$$\{a_0^s, \dots, a_{e-1}^s\} \in A^C \quad (3)$$

und damit $\#A^C \geq e$. Also wird N_e erfüllt.

Annahme: P_e wird nicht erfüllt, d.h. W_e ist unendlich $\wedge W_e \cap A = \emptyset$.

Weil W_e unendlich ist, gilt

$$(\exists x \in W_e)[x > a_{e-1}^s].$$

Wegen der Stufenkonstruktion existiert also ein $t \leq s$ mit:

$$(\exists x \in W_{e,t})[x > a_{e-1}^s \stackrel{(3)}{=} a_{e-1}^t].$$

Dabei vereinbaren wir $a_{-1}^s = -1$. Wegen $W_e \cap A = \emptyset$ ist $W_{e,t} \cap A_t = \emptyset$ und damit $x \notin A_t$. Weil $x > a_{e-1}^t$ gewählt wurde, existiert ein $n \geq e$ mit $a_n^t = x$. Zusammen also:

$$W_{e,t} \cap A_t = \emptyset \wedge (\exists n \geq e)[a_n^t \in W_{e,t}].$$

Wenn wir nun noch zeigen, daß e mit dieser Eigenschaft minimal ist, so sind wir fertig, weil dann im Algorithmus a_n^t in Stufe t in A aufgenommen wird, im Widerspruch zur Annahme $W_e \cap A = \emptyset$.

Angenommen also, es gäbe $e' < e$ mit $W_{e',t} \cap A_t = \emptyset$, etc. Wegen $s \leq t$ gilt dann erst recht $W_{e',s} \cap A_s = \emptyset$, und damit wegen (2) und $e' < e$: $W_{e'} \cap A = \emptyset$. Dann kann aber kein Element aus $W_{e'}$ in A aufgenommen worden sein, was der Annahme widerspricht, daß die Bedingung des Algorithmus für e' erfüllt waren.

Noch eine Bitte: Falls ihr auf den Übungsblättern oder in den Musterlösungen Fehler findet, oder falls ihr andere, evetentuell schönere Lösungen findet, teilt sie mir bitte mit.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:
<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>