Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

13. Juni 2001

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 3 – Lösungen

Aufgabe 14

(a) **1.:** Zu zeigen: Die kanonischen Indizes D_i sind uniform überführbar in $\lambda i.S_i$, d.h.

$$(\exists s \in P_1)(\forall i)[D_i \downarrow \Rightarrow s(i) \downarrow \wedge D_i = S_{s(i)}]$$

Da D_i für alle i definiert ist, können wir kürzer schreiben:

$$(\exists s \in R_1)(\forall i)[D_i = S_{s(i)}]$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß die kanonischen Indizes in r. a. Indizes überführt werden können, d. h.:

$$(\exists w \in R_1)(\forall i)[D_i = W_{w(i)}]$$

Ferner sind alle Elemente von D_i kleiner als i, also gilt:

$$D_i = \{x \in D_i \colon x < i\} = \{x \in W_{w(i)} \colon x < i\} = S_{\langle w(i),i \rangle} \quad ,$$

und wir können $s(i) := \langle w(i), i \rangle$ setzen.

2.: Zu zeigen: $\lambda i.S_i$ ist uniform überführbar in r. a. Indizes, d.h.

$$(\exists w' \in R_1)(\forall i)[S_i = W_{w'(i)}] \quad ,$$

da auch S_i für alle i definiert ist. Man benutzt das Substitutionstheorem und definiert:

$$\varphi_{w'(i)} := \lambda x. \begin{cases} \varphi_{i.1}(x) & \text{falls } x < i_{.2} \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$S_i = \{x \in dom(\varphi_{i.1}) \colon x < i_{.2}\} = dom(\varphi_{w'(i)}) = W_{w'(i)} \quad .$$

(b) **1.:** Zu zeigen: Charakteristische Indizes sind nicht uniform überführbar in $\lambda i.S_i$, d.h.

$$\neg(\exists f \in P_1)(\forall i)[\varphi_i \in R_1 \wedge rg(\varphi_i) \subseteq \{0,1\} \wedge ext(\varphi_i) \text{ endl.} \Rightarrow f(i) \downarrow \wedge ext(\varphi_i) = S_{f(i)}]$$

Annahme: Ein solches f existiert. Dann kann man aus einem charakteristischen Index i eine Schranke $f(i)_{.2}$ berechnen. Diese kann man verwenden um aus i einen kanonischen Index k zu ermitteln:

$$k := \sum_{j=0}^{f(i)_{.2}} 2^j \cdot \varphi_i(j)$$

Das ist aber laut Vorlesung nicht möglich.

2.: Zu zeigen: $\lambda i.S_i$ sind nicht uniform überführbar in charakteristische Indizes, d.h.:

$$\neg(\exists g \in R_1)(\forall i)[\varphi_{g(i)} \in R_1 \wedge rg(\varphi_{g(i)}) \subseteq \{0,1\} \wedge ext(\varphi_{g(i)}) \text{ endl.} \wedge ext(\varphi_{g(i)}) = S_i]$$

Annahme: Ein solches g exisitiert. Dann könnte man auch r. a. Indizes uniform in charakteristische überführen , denn:

$$\begin{aligned} W_i &= \{x \in W_i\colon\ x < x+1\} = \{x \in \mathbb{N}\colon\ x \in S_{\langle i,x+1\rangle}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_{g(\langle i,x+1\rangle)}(x) = 1\} = ext(\lambda x.\varphi_{g(\langle i,x+1\rangle)}(x)) \quad , \end{aligned}$$

und mit dem Substitutionstheorem kann man leicht einen Index von $\lambda x.\varphi_{g(\langle i,x+1\rangle)}(x)$ aus i berechnen. Das steht im Widerspruch zu einem Satz aus der Vorlesung.

(c) **1.:** Zu zeigen: r. a. Indizes sind nicht uniform überführbar in $\lambda i.S_i$.

Annahme: Sie wären es, also $W^{\text{fin}} \succeq S$. Laut Vorlesung $X^{\text{fin}} \succeq W^{\text{fin}}$, also zusammen: $X^{\text{fin}} \succeq S$ im Widerspruch zu (b), Teil 1.

Ein anderer Weg diese Aussage zu zeigen benutzt das Rekursionstheorem: Angenommen es existiert ein $f \in P_1$ mit

$$(\forall i)[W_i \text{ endlich} \Rightarrow f(i)\downarrow \wedge W_i = S_{f(i)}] \quad .$$

Dann würde gelten:

$$W_i \text{ endlich} \Rightarrow (\forall x \in W_i)[x < f(i)_{\cdot 2}] \quad . \tag{$*$}$$

Sei nun $g \in R_1$ mit

$$\varphi_{g(i)} := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } f(i)\downarrow \text{ und } x = f(i)_{\cdot 2} \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$W_{g(i)} := \begin{cases} \{f(i)_{\cdot 2}\} & \text{falls } f(i)\downarrow \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mithin ist $W_{g(i)}$ jedenfalls endlich für alle $i \in \mathbb{N}$. Das Rekursionstheorem liefert ein e mit $W_e = W_{g(e)}$. Da W_e dann endlich ist, muß $f(e)$ definiert sein, also gilt

$$W_e = \{f(e)_{\cdot 2}\} \quad ,$$

im Widerspruch zu $(*)$.

2.: Zu zeigen: $\lambda i.S_i$ ist nicht uniform überführbar in kanonische Indizes.

Annahme: Sie wären es, also $S \succeq D$. Laut Vorlesung $D \succeq X^{\text{fin}}$, also zusammen: $S \succeq X^{\text{fin}}$ im Widerspruch zu (b), Teil 2.

Aufgabe 15

(a) *Annahme:* $(\exists g \in R_1)[f \sqsubseteq g]$
Sei $h := \lambda x.1 \dot{-} g(x)$. Dann ist $h \in R_1$ und es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ mit $h = \varphi_e$. Nach Definition von h ist $\varphi_e(e) = h(e)$ definiert und in $\{0,1\}$. Also ist auch $f(e)$ definiert und damit $g(e)\downarrow = f(e)$. Es folgt:

$$f(e) = \varphi_e(e) = h(e) = 1 \dot{-} g(e) = 1 \dot{-} f(e)$$

Widerspruch! $\square$

(b) Seien $A := \{i\colon \varphi_i(i)\downarrow = 1\}$ und $B := \{i\colon \varphi_i(i)\downarrow = 0\}$.

Gäbe es eine entscheidbare Menge M mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M^C$, dann wäre χ_M eine total berechenbare Fortsetzung der Funktion f aus Teil (a). Weil f keine solche Fortsetzung besitzt, sind A und B folglich rekursiv untrennbar. $\square$

(c) **Behauptung:** $\neg(\exists h \in P_1)(\forall e)[dom(\varphi_e) \text{ endlich} \implies h(e)\downarrow \wedge \varphi_{h(e)} \in R_1 \wedge \varphi_e \sqsubseteq \varphi_{h(e)}]$

Beweis: *Annahme*: h mit obiger Eigenschaft existiert.
Sei $g \in P_1$ beliebig. Mit Hilfe von h konstruieren wir eine total berechenbare Fortsetzung von g, was im Widerspruch zu Aufgabenteil (a) steht:

Definiere (mit dem Substitutionstheorem) $s \in R_1$:

$$\varphi_{s(i)} := \lambda x. \begin{cases} g(x) & \text{falls } x = i, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $dom(\varphi_{s(i)})$ für alle i endlich.
$\implies \forall i\colon h(s(i))\downarrow \wedge\, \varphi_{h(s(i))} \in R_1 \wedge \varphi_{s(i)} \sqsubseteq \varphi_{h(s(i))}$.
Definiere: $g' := \lambda i.\varphi_{h(s(i))}(i)$
$\implies g' \in R_1 \wedge g \sqsubseteq g'$. *Widerspruch*! $\square$

Aufgabe 16

Aus dem Satz von Rice/Shapiro kann man direkt folgern:

Korollar: Sei $F \subseteq P_1$ mit $I := \{i\colon \varphi_i \in F\}$ r.a. Dann gilt:

(1) $\lambda x.\uparrow \in F \implies F = P_1$,

(2) $F \neq \emptyset \implies F$ enthält mindestens eine endliche und eine totale Funktion.

Im folgenden schreiben wir $Ind(F) := \{i : \varphi_i \in F\}$ für die Indexmenge einer Familie $F \subseteq P_1$.

(a) $F := \{f \in P_1\colon f \text{ injektiv}\}$.
$\lambda x.\uparrow \in F \wedge F \neq P_1 \stackrel{(1)}{\implies} Ind(F)$ nicht r.a.

(b) $\{i\colon \varphi_i \text{ nicht injektiv}\} = \{i\colon (\exists x, y, t)[x \neq y \wedge \varphi_{i,t}(x)\downarrow = \varphi_{i,t}(y)\downarrow]\}$, also r.a.

(c) $F := \{f \in P_1 \colon f \text{ surjektiv}\}$.
$Ind(F)$ nicht r.a. folgt aus Aufgabe 19, weil F nicht mal numerierbar ist, oder direkt aus (2), weil F keine endliche Funktion enthält.

(d) $F := \{f \in P_1 \colon 0 < \#dom(f) < \infty\}$
F enthält keine totale Funktion $\stackrel{(2)}{\Longrightarrow}$ $Ind(F)$ nicht r.a.

(e) $F := \{f \in P_1 \colon 0 < \#dom(f) < \infty \vee dom(f) = \mathbb{N}\}$.
Hier können die obigen Folgerungen nicht benutzt werden. Trotzdem läßt sich der Satz von Rice/Shapiro anwenden. Wähle:

$$\delta := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \uparrow & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g := \lambda x.\begin{cases} 0 & \text{falls } x \in 2\mathbb{N}, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\delta \in F$ und $\delta \sqsubseteq g$, aber $g \notin F$. Also ist $Ind(F)$ nicht r.a.

(f) $F := \{f \in P_1 \colon f(0)\downarrow \wedge \varphi_{f(0)} = g\}$, wobei $g \in P_1$.
$Ind(F)$ ist nicht r.a. Dies läßt sich aber nicht direkt aus dem Satz von Rice/Shapiro folgern:

(i) Sei $f \in F$ beliebig. Dann ist $\delta := \begin{cases} f(0) & \text{falls } x = 0, \\ \uparrow & \text{sonst,} \end{cases}$ eine endliche Funktion aus F mit $\delta \sqsubseteq f$.

(ii) Seien nun $\delta \in F$ endlich und $f \in P_1$ mit $\delta \sqsubseteq f$ gegeben. Wegen $\delta(0)\downarrow$ folgt $f(0)\downarrow$ und $\varphi_{f(0)} = \varphi_{\delta(0)} = g$, also $f \in F$.

Wir zeigen nun, daß sogar F nicht r.a. ist: Gäbe es ein $\psi \in P_2$ mit $F = \{\psi_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, dann wäre $A := \{i \colon \varphi_i = g\} = rg(\lambda i.\psi_i(0))$ r.a. A ist aber nicht r.a. Dies folgt aus (2), weil $\{\varphi_i \colon i \in A\} = \{g\}$ entweder keine totale Funktion enthält (falls $dom(g)$ endlich ist) oder keine endliche Funktion (falls $dom(g)$ unendlich ist). $\square$

Aufgabe 17

(a) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_k = \{f(k)\}]$ ist wahr: Setze

$$\varphi_{h(e)} := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = f(e) \\ \uparrow & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. $W_{h(e)} = \{f(e)\}$. Dann existiert nach dem Rekursionstheorem ein k mit

$$W_k = W_{h(k)} = \{f(k)\}.$$

(b) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_k = \{f(k)\}]$ gilt nicht, weil es $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $W_k = \emptyset$.

(c) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_{f(k)} = \{f(k) + k\}]$ gilt nicht, weil es nach dem Substitutionstheorem $f \in R_1$ gibt mit $(\forall k)[W_{f(k)} = \emptyset]$.

(d) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_{f(k)} = \{f(k)+k\}]$ ist wahr: Definiere $h \in R_1$ durch $W_{h(i,k)} := \{i+k\}$. Nach dem Rekursionstheorem mit Parametern existiert ein $f \in R_1$ so daß für alle k gilt:

$$W_{f(k)} = W_{h(f(k),k)} = \{f(k) + k\}.$$

(e) $(\exists m, n \in \mathbb{N})[W_n = \{m\} \wedge W_m = \{n+1\}]$ ist wahr: Wir wenden den doppelten Rekursionssatz von Smullyan an. Wähle $f, g \in R_1$ mit $W_{f(a,b)} = \{b+1\}$ und $W_{g(a,b)} = \{a\}$. Dann existieren m, n mit $W_m = W_{f(m,n)} = \{n+1\}$ und $W_n = W_{g(m,n)} = \{m\}$.

Aufgabe 18

Nein, es gibt ein $f \in R_1$ mit $(\forall i)[\varphi_i \text{ total} \implies \varphi_{f(i)} \text{ total}]$, so daß kein $e \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\varphi_e = \varphi_{f(e)} \wedge \varphi_e$ total: Sei etwa via Substitutionstheorem $f \in R_1$ mit $\varphi_{f(i)}(x) = \varphi_i(x) + 1$. Dann ist für totales φ_i auch $\varphi_{f(i)}$ total, aber $\varphi_i \neq \varphi_{f(i)}$.

Aufgabe 19

(a) **Behauptung:** $(\forall f)[\mathit{Fix}(f)$ besitzt unendliche r.a. Teilmenge$]$

Beweis: Nach der uniformen Version des Rekursionstheorems existiert eine injektive Funktion $\mathit{fix} \in R_1$ mit

$$(\forall i)[\varphi_{\mathit{fix}(i)} = \varphi_{\varphi_i(fix(i))}].$$

Wir wählen ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ und setzen $h = \lambda y.fix(pad(i, y))$. Dann ist $rg(h) \subseteq \mathit{Fix}(F)$, und weil *fix* und *pad* injektiv sind ist $rg(h)$ unendlich.

Ein anderer Weg benutzt das Rekursionstheorem mit Parametern (und damit implizit die obige Konstruktion), nach dem zu $g := \lambda x, y.f(x)$ ein injektives $k \in R_1$ existiert mit

$$(\forall y)[\varphi_{k(y)} = \varphi_{g(k(y),y)} = \varphi_{f(k(y))}].$$

Damit ist $rg(k)$ eine unendliche r.a. Teilmenge von $\mathit{Fix}(f)$. □

(b) **Behauptung:** $(\exists f)[\mathit{Fix}(f)$ ist nicht r.a.$]$

Beweis: Wähle $f \in R_1$ mit $(\forall i)[\varphi_{f(i)} = \lambda x.\uparrow]$. Dann ist $\mathit{Fix}(f) = \{i : \varphi_i = \lambda x.\uparrow\}$, also $\mathit{Fix}(f)$ nicht r.a. □

(c) **Behauptung:** $(\forall f)[\mathit{Fix}(f) \text{ entscheidbar} \implies \{\varphi_i : i \in \mathit{Fix}(f)\} = P_1]$

Beweis: Sei $\mathit{Fix}(f)$ entscheidbar.

Annahme: $\exists g \in P_1 \setminus \{\varphi_i : i \in \mathit{Fix}(f)\}$.
Setze

$$\varphi_{h(i)} := \begin{cases} \varphi_{f(i)} & \text{falls } \varphi_i \neq \varphi_{f(i)} \quad (\text{d.h. } i \notin \mathit{Fix}(f)) \\ g & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte, daß wir h nur so definieren können, weil nach Voraussetzung $\mathit{Fix}(f)$ entscheidbar ist. Nach dem Rekursionstheorem existiert ein e mit $\varphi_e = \varphi_{h(e)}$.

Fall 1: $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.
$\implies \varphi_e = \varphi_{h(e)} = g$. *Widerspruch* zu $g \notin \{\varphi_i : i \in \mathit{Fix}(f)\}$.

Fall2: $\varphi_e \neq \varphi_{f(e)}$.
$\implies \varphi_e = \varphi_{h(e)} = \varphi_{f(e)}$. *Widerspruch*! □

Noch eine Bitte: Falls ihr auf den Übungsblättern oder in den Musterlösungen Fehler findet, oder falls ihr andere, evetentuell schönere Lösungen findet, teilt sie mir bitte mit.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`