Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

30. Mai 2001

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 2 – Lösungen

Folgende endliche Approximationen der rekursiv aufzählbaren Mengen werden wir des öfteren verwenden:

Definition: $W_{e,s}^{(n)} := dom(\varphi_{e,s}^{(n)}) \cap \{0, \dots, s-1\}^n$.

$W_{e,s}^{(n)}$ ist für alle e, s, n endlich. Ein kanonischer Index für $W_{e,s}^{(n)}$ kann uniform in e, s bestimmt werden. Für alle e, n ist $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} W_{e,s}^{(n)} = W_e^{(n)}$.

Aufgabe 7

(a) "A ist rekursiv aufzählbar" ist rekursiv invariant:

Sei A r.a. und $\pi \in Per$. Dann existiert ein $f \in P_1$ mit $A = rg(f)$. Es folgt

$$\pi(A) = \pi(rg(A)) = \{\pi(f(x)) \colon x \in dom(f)\} = rg(\pi \circ f).$$

Also ist $\pi(A)$ Bild der berechenbaren Funktion $\pi \circ f$ und damit r.a.

(b) "$2\mathbb{N} \subseteq A$" ist *nicht* rekursiv invariant:

Die Permutation π sei definiert durch $\pi(2x) = 2x+1$ und $\pi(2x+1) = 2x$. Offensichtlich ist π berechenbar.

Wir wählen $A = 2\mathbb{N}$. Dann ist $\pi(A) = 2\mathbb{N} + 1$, also $2\mathbb{N} \not\subseteq \pi(A)$.

(c) "$(\exists B \subseteq A)[B \equiv 2\mathbb{N}]$" ist rekursiv invariant:

Seien $\pi \in Per$ und A beliebig, so daß $(\exists B \subseteq A)[B \equiv 2\mathbb{N}]$. Dann gibt es ein $\rho \in Per$ mit $B = \rho(2\mathbb{N})$. Also gilt $\rho(2\mathbb{N}) \subseteq A$ und damit $\pi \circ \rho(2\mathbb{N}) \subseteq \pi(A)$. Weil $\pi \circ \rho \in Per$, folgt $\pi \circ \rho(2\mathbb{N}) \equiv 2\mathbb{N}$, womit $\pi(A)$ ebenfalls die geforderte Eigenschaft besitzt.

(d) "A ist rechtseindeutig" ist *nicht* rekursiv invariant:

Wähle $A = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ und $\pi = (\langle 1,0\rangle\ \langle 0,1\rangle)$ (d.h. π ist die Permutation, die $\langle 1,0\rangle$ mit $\langle 0,1\rangle$ vertauscht, und sonst alles unverändert läßt). Dann ist $\pi(A) = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$ nicht rechtseindeutig.

(e) "$(\exists f \in R_1)(\forall n)[\ \#\{x \in A \colon x \leq f(n)\} \geq n]$" ist rekursiv invariant:

Sei A gegeben, so daß ein $f \in R_1$ existiert mit $(\forall n)[\ \#\{x \in A \colon x \leq f(n)\} \geq n]$. Wir wählen $\pi \in Per$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existieren paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$ mit $a_i \leq f(n)$ für $i = 1, \dots, n$. Nun gilt

$$\pi(a_1), \dots, \pi(a_n) \leq \max_{i=1}^{n} \pi(a_i) \leq \max\{\pi(a) \colon a \leq f(n)\}.$$

Weil π injektiv ist, sind auch die Bilder $\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)$ paarweise verschieden. Wir setzen $f' := \lambda n. \max\{\pi(a) : a \leq f(n)\}$. Dann ist $f' \in R_1$ und $\#\{x \in \pi(A) : x \leq f'(n)\} \geq \#\{\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\} \geq n$.

(f) Folgender Hilfssatz wird benutzt:

Hilfssatz: A, B entscheidbar und A, B, A^C, B^C unendlich $\implies$ $A \equiv B$.

Beweis: Seien

$$A = \{a_0 < a_1 < a_2 \ldots\}, \qquad A^C = \{\bar{a}_0 < \bar{a}_1 < \bar{a}_2 \ldots\},$$

$$B = \{b_0 < b_1 < b_2 \ldots\}, \qquad B^C = \{\bar{b}_0 < \bar{b}_1 < \bar{b}_2 \ldots\}.$$

Weil A, B, A^C, B^C unendlich und entscheidbar sind, sind die folgenden Funktionen total berechenbar:

$$f = \lambda i.a_i, \quad g = \lambda i.b_i, \quad h = \lambda i.\bar{a}_i, \quad l = \lambda i.\bar{b}_i.$$

Definiere $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\pi(a_i) = b_i, \quad \pi(\bar{a}_i) = \pi(\bar{b}_i).$$

π ist wohldefiniert, bijektiv und total berechenbar. Formal läßt sich π folgendermaßen definieren:

$$\pi(x) := \begin{cases} g(f^{-1}(x)) & \text{falls } x \in A, \\ l(h^{-1}(x)) & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

$\square$

Behauptung: Die Eigenschaft „χ_A ist rekursiv rekursiv“ ist nicht rekursiv invariant.

Beweis: Sei A beliebig, so daß χ_A berechenbar, aber nicht primitiv rekursiv ist. Dann sind A und A^C nicht endlich. Aus dem Hilfsatz folgt nun $A \equiv 2\mathbb{N}$. Da $\chi_{2\mathbb{N}}$ primitiv rekursiv ist, folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 8

Behauptung: $\psi \in P_2$ ist Gödelnumerierung $\iff$
ψ numeriert P_1 und $(\exists h \in R_2)(\forall i, j)[\psi_{h(i,j)} = \psi_i \circ \psi_j]$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Es ist bekannt: $(\exists g \in R_2)(\forall i, j)[\varphi_{g(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j]$. Weil ψ Gödelnumerierung ist, existieren Übersetzungen $s, t \in R_1$ zwischen ψ und φ:

$$(\forall i)[\varphi_i = \psi_{s(i)} \wedge \psi_i = \varphi_{t(i)}].$$

Es folgt:

$$\psi_i \circ \psi_j = \varphi_{t(i)} \circ \varphi_{t(j)} = \varphi_{g(t(i),t(j))} = \psi_{s(g(t(i),t(j)))}.$$

($\Leftarrow$): Wir zeigen, daß φ übersetzbar ist in ψ, d.h. $(\exists t \in R_1)(\forall e)[\varphi_e = \psi_{t(e)}]$.

Setze:

$$f_1 = \lambda x.\langle 0, x\rangle$$

$$f_2 = \lambda\langle e, x\rangle.\langle e+1, x\rangle$$

$$f_3 = \lambda\langle e, x\rangle.\varphi_e(x)$$

Offensichtlich liegen f_1, f_2 und f_3 in P_1. Weil ψ eine Numerierung von P_1 ist, existieren a, b, c mit:

$$\psi_a = f_1, \psi_b = f_2, \psi_c = f_3.$$

Wir benutzen nun die Funktion h, die in ψ uniform die Komposition zweier Funktionen berechnet, um aus ψ_a, ψ_b, ψ_c die gesuchte Übersetzung zu konstruieren:

$$s(0) := a,$$

$$s(n+1) := h(b, s(n)),$$

$$t(e) := h(c, s(e)).$$

Damit gilt für alle e:

$$\psi_{t(e)} = \psi_c \circ \psi_{s(e)} = \psi_c \circ \psi_b^e \circ \psi_a = \lambda x.\varphi_e(x) = \varphi_e.$$

□

Aufgabe 9

(a) numerierbar via

$$\lambda i, x. \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } (\forall y < x)[\varphi_i(y)\downarrow], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) numerierbar via

$$\psi = \lambda i, x. \begin{cases} \varphi_{i.1}(x) & \text{falls } \neg(\varphi_{i.1}(x)\downarrow = i.2), \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: $\{f \in P_1 \colon f \text{ nicht surjektiv}\} = \{\psi_i \colon i \in \mathbb{N}\}$

Beweis: „$\subseteq$": $f \in P_1, f$ nicht surjektiv $\implies \exists i, y$: $f = \varphi_i \wedge y \notin rg(\varphi_i) \implies f = \psi_{\langle i,y\rangle}$.

„$\supseteq$": $i \in \mathbb{N}$ beliebig $\implies i.2 \notin rg(\psi_i) \implies \psi_i$ nicht surjektiv. □

(c) **Behauptung:** *Per* ist nicht numerierbar.

Beweis: *Annahme*: $\exists \psi \in P_2$: ψ Universelle für *Per*.

$Per \subseteq R_1 \implies \psi \in R_2$. Wir konstruieren ein $\pi \in Per$ mit $(\forall n)[\pi \neq \psi_n]$, indem wir gegen ψ_n an der Stelle $2n$ diagonalisieren:

$$\pi(2n) := \begin{cases} 2n & \text{falls } \psi_n(2n) \neq 2n, \\ 2n+1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\pi(2n+1) := \begin{cases} 2n+1 & \text{falls } \psi_n(2n) \neq 2n, \\ 2n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $\pi \in Per$ und nach Konstruktion $(\forall n)[\pi(2n) \neq \psi_n(2n)]$, also $(\forall n)[\pi \neq \psi_n]$. *Widerspruch*! □

(d) **Behauptung:** $F := \{f \in P_1 \colon f \text{ injektiv}\}$ ist numerierbar.

Beweis: Die folgende Numerierung beruht auf der Idee, zur Berechnung der Funktion ψ_i die Funktion φ_i per dovetailing simultan an allen Stellen zu berechnen. Sobald ein y als Funktionswert auftaucht (etwa $\varphi_i(x) = y$) setzen wir $\psi_i(x) := y$. Für alle weiteren Stellen $z \neq x$, an denen φ_i ebenfalls den Wert y annimmt (die wir aber später finden als x), setzen wir $\psi_i(z) := \uparrow$.

$$\psi := \lambda i, x. \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } (\exists s)[\varphi_{i,s}(x)\downarrow \wedge \\ & \qquad (\forall z,t)[\langle z,t\rangle < \langle x,s\rangle \implies \neg(\varphi_{i,t}(z)\downarrow = \varphi_{i,s}(x))]], \\ \uparrow & \textit{sonst}. \end{cases}$$

$\implies \psi \in P_2$.

Zu zeigen: $F = \{\psi_i \colon i \in \mathbb{N}\}$

„$\subseteq$": Sei $f \in P_1$ mit f injektiv beliebig. Dann exisiert ein i mit $\varphi_i = f$.

Wir betrachten nun ein beliebiges $x \in \mathbb{N}$. Falls $\varphi_i(x)\uparrow$, dann ist nach Definition auch $\psi_i(x)\uparrow$. Andernfalls existiert $s := \mu t[\varphi_{i,t}(x)\downarrow]$. Dann gilt für alle $t < s$, daß $\varphi_{i,t}(x)\uparrow$. Und für alle $\langle z,t\rangle < \langle x,s\rangle$ mit $z \neq x$ und $\varphi_{i,t}(z)\downarrow$ ist $\varphi_{i,t}(z) \neq \varphi_{i,s}(x)$, weil $\varphi_i = f$ injektiv ist. Also ist nach Definition $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$.

Insgesamt gilt also $\psi_i = \varphi_i = f$

„$\supseteq$": *Annahme*: $\exists i, x, z$: $x \neq z \wedge \psi_i(x)\downarrow = \psi_i(z)\downarrow$.
Dann existieren s (zu x) und t (zu z) aus der Definition von ψ. Insbesondere gilt $\varphi_{i,s}(x)\downarrow = \psi_i(x) = \psi_i(z) = \varphi_{i,t}(z)\downarrow$. O.B.d.A. sei $\langle z,t\rangle < \langle x,s\rangle$. Dann folgt nach Definition von ψ: $\varphi_{i,t}(z) \neq \varphi_{i,s}(x)$. *Widerspruch*! □

(e) **Behauptung:** $F := \{f \in P_1 \colon \#\, dom(f) \text{ gerade oder unendlich}\}$ ist numerierbar.

Beweis: Zur Berechnung von ψ_i zählen wir (per Dovetailing) sukzessive den Wertebereich von φ_i auf, stellen dabei aber sicher, daß dieser, falls er endlich ist, eine gerade Anzahl von Werten hat: Auf die übliche Weise konstruiert man eine Funktion $d \in P_1$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi_{d(i)}$ ist injektiv und $dom(\varphi_{g(i)})$ Anfangsabschnitt, und ferner

$$dom(\varphi_i) = \{\varphi_{g(i)}(j) \colon j \in \mathbb{N} \wedge \varphi_{g(i)}(j)\downarrow\}$$

Damit definiert man nun:

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } \varphi_i(x)\downarrow \text{, und } [\ x = \varphi_{g(i)}(2k) \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_{g(i)}(2k+1)\downarrow] \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Dadurch ist $\psi_i = \varphi_i$, falls $\#\, dom(\varphi_i)$ gerade oder unendlich. Falls $\#\, dom(\varphi_i)$ ungerade ist, wird die Berechnung von ψ_i auf dem letzten der durch $\varphi_{g(i)}$ gegebenen Elemente nicht terminieren, da die Berechnung von $\varphi_{g(i)}(2k+1)$ nicht terminiert. □

(f) **Behauptung:** $F := R_1 \cup \{\lambda x. \uparrow\}$ ist nicht numerierbar.

Beweis: Wäre F numerierbar via $\psi \in P_2$, dann wäre auch R_1 numerierbar via

$$\xi_i := \lambda x. \begin{cases} \psi_{i.1}(x) & \text{falls } \psi_{i.1, i.2}(0)\downarrow, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\psi_{i,t}(x) = \varphi_{e,t}(i,x)$ sein soll für $\lambda i, x. \psi_i(x) = \varphi_e^{(2)}$. *Widerspruch*! □

(g) **Behauptung:** $F' := F - \{\delta\}$ ist numerierbar.

Beweis: Sei F numerierbar via ψ. Es ist $F' = \{f \in F' \colon f \sqsubseteq \delta\} \cup \{f \in F' \colon f \not\sqsubseteq \delta\}$. $\{f \in F' \colon f \sqsubseteq \delta\}$ ist endlich, also numerierbar oder leer. $\{f \in F' \colon f \not\sqsubseteq \delta\}$ ist leer oder numerierbar via

$$\lambda i, x. \begin{cases} \psi_{i.1}(x) & \text{falls } \psi_{i.1,i.2}(i.3)\downarrow \neq \delta(i.3), \\ g(x) & \text{sonst.} \end{cases},$$

wobei g eine beliebige feste Funktion aus F' ist: wie in der letzten Aufgabe hängt die Fallunterscheidung nicht von x, sondern nur vom Index i ab. Als Vereinigung numerierbarer (oder leerer) Familien ist auch F' numerierbar. $\square$

Aufgabe 10

(a) Offensichtlich ist $\psi \in P_2$. Wir zeigen $\{\varphi_i \colon i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\psi_i \colon i \in \mathbb{N}\}$:

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig.
Fall 1: $\varphi_i(0)\uparrow \implies \psi_{\langle i,0\rangle} = \varphi_i$.
Fall 2: $\varphi_i(0)\downarrow = p \implies \psi_{\langle i,p+1\rangle} = \varphi_i$.

ψ numeriert also P_1, aber ψ ist keine Gödelnumerierung. Der Beweis benutzt die Tatsache, daß die Menge $A := \{i \colon \psi_i(0)\downarrow\}$ entscheidbar ist:

$$\psi_i(0)\downarrow \iff i.2 > 0.$$

Wenn ψ Gödelnumerierung ist, dann kann die Menge $K_0 = \{i \colon \varphi_i(0)\downarrow\}$ (vgl. Aufgabe 4 (b)) auf A reduziert werden:

Annahme: ψ ist Gödelnumerierung.
Dann existiert eine Übersetzung $t \in R_1$ von φ in ψ: $(\forall i)[\varphi_i = \psi_{t(i)}]$. Es folgt für alle i:

$$i \in K_0 \iff \varphi_i(0)\downarrow \iff \psi_{t(i)}(0)\downarrow \iff t(i) \in A.$$

D.h. K_0 ist entscheidbar. *Widerspruch*! $\square$

(b) Es gibt keine Gödelnumerierung ψ, so daß $\{i \colon \psi_i(0)\downarrow\}$ entscheidbar ist. Dies erhält man mit demselben Argument wie in (a):

$$(\exists t \in R_1)(\forall i)[\varphi_i = \psi_{t(i)}] \implies [\varphi_i(0)\downarrow \iff \psi_{t(i)}(0)\downarrow].$$

(c) Es gibt keine Numerierung ψ von P_1, so daß $\{i \colon \psi_i(i)\downarrow\}$ entscheidbar ist. Man kann dies anolog zur Unentscheidbarkeit von K beweisen:

Annahme: $A := \{i \colon \psi_i(i)\downarrow\}$ ist entscheidbar für eine Numerierung ψ von P_1.
Dann ist A^C r.a., d.h. es gibt ein $f \in P_1$ mit $A^C = dom(f)$. Weil ψ Numerierung von P_1 ist, gilt $(\exists i)[\psi_i = f]$. Damit folgt:

$$i \in A \iff \psi_i(i)\downarrow \iff i \in dom(\psi_i) \iff i \in A^C$$

Widerspruch! $\square$

(d) Es gibt eine Gödelnumerierung ψ, so daß $\{2i \colon \varphi_{2i}(2i)\downarrow\}$ entscheidbar ist. Sei $\psi \in P_2$ folgendermaßen definiert:

$$\psi(2i, x) := \uparrow$$

$$\psi(2i+1, x) := \varphi_i(x)$$

Es gilt also $\varphi_i = \psi_{2i+1}$ für alle i. D.h. φ ist übersetzbar in ψ via $\lambda i.2i+1$ und ψ damit Gödelnumerierung. Außerdem ist $\{2i \colon \varphi_{2i}(2i)\downarrow\} = \emptyset$, also entscheidbar.

Aufgabe 11

(a) **Behauptung:** $(\exists g \in R_1)(\forall e)[W^{(2)}_{g(e)} = \mathit{graph}(\varphi_e)]$

Beweis: Nach dem Substitutionstheorem existiert ein $g \in R_1$, so daß für alle e gilt:

$$\varphi^{(2)}_{g(e)} := \lambda x, y. \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi_e(x) \downarrow = y, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\forall e$: $W^{(2)}_{g(e)} = \mathit{graph}(\varphi_e)$. □

Behauptung: $(\exists h \in P_1)(\forall e)(\forall f)[W^{(2)}_e = \mathit{graph}(f) \implies h(e) \downarrow \wedge \varphi_{h(e)} = f]$

Beweis: Wähle mit dem Substitutionstheorem ein $h \in R_1$, so daß für alle e gilt:

$$\varphi_{h(e)} = \lambda x.(\mu y[(x, y_{\cdot 1}) \in W^{(2)}_{e, y_{\cdot 2}}])_{\cdot 1}$$

□

(b) **Behauptung:** $(\exists g \in R_2)(\forall e, i)[W_{g(e,i)} = \varphi_e^{-1}(W_i)]$

Beweis: Es ist $\varphi_e^{-1}(W_i) = \{x\colon (\exists y \in W_i)[\varphi_e(x) \downarrow = y]\}$. Mit dem Substitutionstheorem folgt $(\exists g \in R_2)(\forall e, i)$:

$$\varphi_{g(e,i)} = \lambda x. \begin{cases} 0 & \text{falls } (\exists y, t)[\varphi_{i,t}(y) \downarrow \wedge \varphi_{e,t}(x) \downarrow = y], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Aufgabe 12

Behauptung: $\neg(\exists h \in P_1)(\forall e)[W_e$ unendlich, entscheidbar $\implies$
$h(e) \downarrow \wedge \varphi_{h(e)} \in R_1$, streng monoton wachsend, $\mathit{rg}(\varphi_{h(e)}) = W_e]$

Beweis: Wähle (mit Substitutionstheorem) $f \in R_1$ mit:

$$\varphi_{f(e)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } \varphi_e(e) \downarrow, \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$W_{f(e)} = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{falls } e \in K, \\ \mathbb{N} - \{0\} & \text{falls } e \notin K. \end{cases}$$

Annahme: h mit obiger Eigenschaft existiert.
$W_{f(e)}$ ist für alle e unendlich und entscheidbar.
$\Longrightarrow$ $\forall e$: $\varphi_{h(f(e))} \in R_1$, streng monoton wachsend, $\mathit{rg}(\varphi_{h(f(e))}) = W_{f(e)}$.
Es folgt für alle e:

$$e \in K \iff W_{f(e)} = \mathbb{N} \iff 0 \in W_{f(e)} \iff 0 \in \mathit{rg}(\varphi_{h(f(e))}) \iff \varphi_{h(f(e))}(0) = 0,$$

und damit, daß K entscheidbar ist. *Widerspruch*! □

Aufgabe 13

(a) **Behauptung:** $(\exists e \in R_1)(\forall e)[W_{h(e)} = \bigcup_{i \in W_e} W_i]$

Beweis: Wähle mit Substitutionstheorem:

$$\varphi_{h(e)} := \lambda x.\mu y[y_{\cdot 1} \in W_{e,y\cdot 2} \wedge x \in W_{y\cdot 1, y\cdot 3}]$$

$\square$

(b) **Behauptung:** $(\exists A \subseteq \mathbb{N})[A$ entscheidbar $\wedge$ $\bigcup_{i \in A} D_i$ unentscheidbar$]$

Beweis: Wähle e mit $W_e = K$. Für die endlichen Approximationen $W_{e,s}$ von K lassen sich uniform kanonische Indizes finden, d.h. es existiert $f \in R_1$ mit $D_{f(s)} = W_{e,s}$. Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$s \leq t \quad \Rightarrow \quad W_{e,s} \subseteq W_{e,t} \quad \Rightarrow \quad D_{f(s)} \subseteq D_{f(t)} \quad \Rightarrow \quad f(s) \leq f(t).$$

Also ist f total und monoton wachsend, also $A = rg(f)$ entscheidbar. Es ist aber

$$\bigcup_{i \in A} D_i = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} D_{f(s)} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} W_{e,s} = W_e = K$$

unentscheibar. $\square$

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:
`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`