Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

11. Juli 1999

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 6

Hinweis: Eine Menge A heißt Σ_k-vollständig, falls sie m-vollständig in Σ_k ist, also falls $A \in \Sigma_k$ und $B \leq_m A$ für alle $B \in \Sigma_k$. A heißt Π_k-vollständig, falls A^c Σ_k-vollständig ist. Insbesondere ist K Σ_1-vollständig, K^K Σ_2-vollständig, und allgemein $\oslash^{(k)}$ Σ_k-vollständig für $k \geq 1$.

Aufgabe 29

Beweisen Sie die folgenden Implikationen:

$$A \text{ maximal} \implies A \text{ hyperhypersimpel} \implies A \text{ hypersimpel} \implies A \text{ simpel.}$$

Aufgabe 30

(a) Zeigen Sie: $\mathit{Fin} := \{e\colon W_e \text{ endlich}\}$ ist Σ_2-vollständig. (Zeigen Sie dazu, daß sich jedes $A = \{x\colon (\exists u)(\forall v)[P(x,u,v)]\}$ mit entscheidbarem P auf auf Fin reduzieren läßt.)

(b) Zeigen Sie: $\mathit{Tot} := \{e\colon \varphi_e \text{ total}\}$ ist Π_2-vollständig. (Benutzen sie (a).)

(c) Sei $f \in P_1$ und $I_f := \{e\colon \varphi_e = f\}$. Zeigen Sie:

1. Wenn $\mathit{dom}(f)$ leer ist, ist I_f Π_1-vollständig.
2. Wenn $\mathit{dom}(f)$ endlich, aber nicht leer ist, liegt I_f in $(\Sigma_2 \cap \Pi_2) \setminus (\Sigma_1 \cup \Pi_1)$.
3. Wenn $\mathit{dom}(f)$ unendlich ist, ist I_f Π_2-vollständig.

Aufgabe 31

Analog zur Turing-Reduzibilität schreiben wir $g \leq_T A$ falls die (partielle) Funktion $g\colon \mathbb{N}^n \rightarrowtail \mathbb{N}$ relativ zum Orakel $A \subseteq \mathbb{N}$ berechenbar ist.

Zu einer totalen Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definieren wir

$$\lim_{s\to\infty} f(x,s) := \begin{cases} y & \text{falls } (\exists t)(\forall s \geq t)[f(x,s) = y], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine partielle Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *limesberechenbar* (relativ zu $A \subseteq \mathbb{N}$), falls es eine total (A-)berechenbare Funktion f gibt mit $g = \lambda x.\lim_{s\to\infty} f(x,s)$.

(a) Es Sei $h := \lambda i.1 + \max(\{x\colon\ (\exists j \leq i)[\varphi_j(i)\downarrow = x]\} \cup \{0\})$.

Zeigen Sie, daß h limesberechenbar ist und stärker wächst als jede total berechenbare Funktion, d.h. $(\forall g \in R_1)(\exists n)(\forall i \geq n)[g(i) < h(i)]$.

(b) Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von $\mathit{Tot} := \{e\colon\ \varphi_e \text{ total}\}$ ist limesberechenbar relativ zu K, aber nicht limesberechenbar (relativ zu $\oslash$).

(c) Zeigen Sie, daß für alle partiellen Funktionen g und alle Orakel A gilt:

$$g \text{ ist limesberechenbar relativ zu } A \iff g \leq_T A'.$$

Hinweis: Für die Richtung ($\Leftarrow$) kann die *use*-Funktion aus der Vorlesung hilfreich sein. Beachten Sie auch, daß A' eine A-berechenbare endliche Approximation besitzt.

(d) Beweisen Sie die folgende Charakterisierung der *high* Mengen, d.h. der Mengen A mit $K' \leq_T A'$:

A ist high, genau dann wenn es eine einstellige Funktion $g \leq_T A$ gibt, die stärker wächst als jede total berechenbare Funktion.

Hinweis: ($\Rightarrow$): Benutzen Sie die Teilaufgaben (b) und (c).
($\Leftarrow$): Zeigen Sie $\mathit{Tot} \leq_T A'$ und verwenden Sie dann 30(b). Benutzen Sie auch hier Teilaufgabe (c), und beachten sie, daß für eine total berechenbare Funktion φ_e auch die Schrittzahlkomplexität $\lambda x.\mu s[\varphi_{e,s}(x)\downarrow]$ total berechenbar ist!

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`