



Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 6

Hinweis: Eine Menge A heißt Σ_k -vollständig, falls sie m -vollständig in Σ_k ist, also falls $A \in \Sigma_k$ und $B \leq_m A$ für alle $B \in \Sigma_k$. A heißt Π_k -vollständig, falls $A^c \in \Sigma_k$ -vollständig ist. Insbesondere ist $K \in \Sigma_1$ -vollständig, $K^K \in \Sigma_2$ -vollständig, und allgemein $\odot^{(k)} \in \Sigma_k$ -vollständig für $k \geq 1$.

Aufgabe 29

Beweisen Sie die folgenden Implikationen:

$$A \text{ maximal} \implies A \text{ hyperhypersimpel} \implies A \text{ hypersimpel} \implies A \text{ simpel.}$$

Aufgabe 30

- (a) Zeigen Sie: $Fin := \{e : W_e \text{ endlich}\}$ ist Σ_2 -vollständig. (Zeigen Sie dazu, daß sich jedes $A = \{x : (\exists u)(\forall v)[P(x, u, v)]\}$ mit entscheidbarem P auf auf Fin reduzieren läßt.)
- (b) Zeigen Sie: $Tot := \{e : \varphi_e \text{ total}\}$ ist Π_2 -vollständig. (Benutzen sie (a).)
- (c) Sei $f \in P_1$ und $I_f := \{e : \varphi_e = f\}$. Zeigen Sie:
 - 1. Wenn $dom(f)$ leer ist, ist I_f Π_1 -vollständig.
 - 2. Wenn $dom(f)$ endlich, aber nicht leer ist, liegt I_f in $(\Sigma_2 \cap \Pi_2) \setminus (\Sigma_1 \cup \Pi_1)$.
 - 3. Wenn $dom(f)$ unendlich ist, ist I_f Π_2 -vollständig.

Aufgabe 31

Analog zur Turing-Reduzibilität schreiben wir $g \leq_T A$ falls die (partielle) Funktion $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ relativ zum Orakel $A \subseteq \mathbb{N}$ berechenbar ist.

Zu einer totalen Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(x, s) := \begin{cases} y & \text{falls } (\exists t)(\forall s \geq t)[f(x, s) = y], \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine partielle Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *limesberechenbar* (relativ zu $A \subseteq \mathbb{N}$), falls es eine total (A -)berechenbare Funktion f gibt mit $g = \lambda x. \lim_{s \rightarrow \infty} f(x, s)$.

- (a) Es Sei $h := \lambda i.1 + \max(\{x: (\exists j \leq i)[\varphi_j(i) \downarrow = x]\} \cup \{0\})$.

Zeigen Sie, daß h limesberechenbar ist und stärker wächst als jede total berechenbare Funktion, d.h. $(\forall g \in R_1)(\exists n)(\forall i \geq n)[g(i) < h(i)]$.

- (b) Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von $Tot := \{e: \varphi_e \text{ total}\}$ ist limesberechenbar relativ zu K , aber nicht limesberechenbar (relativ zu $\emptyset$).

- (c) Zeigen Sie, daß für alle partiellen Funktionen g und alle Orakel A gilt:

$$g \text{ ist limesberechenbar relativ zu } A \iff g \leq_T A'.$$

Hinweis: Für die Richtung $(\Leftarrow)$ kann die *use*-Funktion aus der Vorlesung hilfreich sein. Beachten Sie auch, daß A' eine A -berechenbare endliche Approximation besitzt.

- (d) Beweisen Sie die folgende Charakterisierung der *high* Mengen, d.h. der Mengen A mit $K' \leq_T A'$:

A ist high, genau dann wenn es eine einstellige Funktion $g \leq_T A$ gibt, die stärker wächst als jede total berechenbare Funktion.

Hinweis: $(\Rightarrow)$: Benutzen Sie die Teilaufgaben (b) und (c).

$(\Leftarrow)$: Zeigen Sie $Tot \leq_T A'$ und verwenden Sie dann 30(b). Benutzen Sie auch hier Teilaufgabe (c), und beachten sie, daß für eine total berechenbare Funktion φ_e auch die Schrittzahlkomplexität $\lambda x.\mu s[\varphi_{e,s}(x) \downarrow]$ total berechenbar ist!

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>