Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

27. Juni 1999

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 5

Aufgabe 28 *Eindeutige Numerierung für* $\{W_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$ [*Friedberg*]

Für $A \subseteq \mathbb{N}^2$ definieren wir $A_i := \{x\colon\ (i,x) \in A\}$. Eine r.a. Menge $A \subseteq \mathbb{N}^2$ heißt *eindeutige Numerierung* für $\{A_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$, falls $(\forall i,j)[i \neq j \implies A_i \neq A_j]$.

Der folgende Algorithmus berechnet eine eindeutige Numerierung A von $\{W_i :\ i \in \mathbb{N}\}$. $A \subseteq \mathbb{N}^2$ wird durch endliche Approximation erzeugt. Hierzu werden die A_x für alle $x \in \mathbb{N}$ simultan in Stufen konstruiert. Wir nennen im folgenden x einen *Verfolger* von e, falls wir versuchen das Ziel $A_x = W_e$ zu erreichen. Verfolger werden während der Konstruktion *ernannt*, können aber auch wieder als solche *entlassen* werden. Solange x Verfolger von e ist, zählen wir W_e in A_x auf. Wird x entlassen, dann werden nur noch in der entsprechenden Stufe Elemente in A_x aufgezählt, d.h. A_x bleibt endlich.

$A_{x,s}$ bezeichnet die Menge der Elemente, die bis Stufe s in A_x aufgezählt wurden. Es ist also $A_x = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} A_{x,s}$. O.B.d.A. nehmen wir $W_0 = \mathbb{N}$ an.

Algorithmus zur Konstruktion von A

Stufe 0: Ernenne 0 zum Verfolger von 0. Für alle x setze $A_{x,0} := \emptyset$.

Stufe $s+1$: $\{$*Invariante*: x Verfolger von $e \implies A_{x,s} = W_{e,s}\}$

Entlassen: Für alle x, e so daß x Verfolger von e ist, entlasse x, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $(\exists i < e)[W_{i,s} \cap \{0,\ldots,x\} = W_{e,s} \cap \{0,\ldots,x\}]$
$\{$*Grund*: W_i und W_e sehen „bis x ähnlich“ aus. Deshalb soll höchstens der kleinere Index i verfolgt werden.$\}$

(b) $x > 0$ und es gibt ein y, das schon entlassen wurde, mit $A_{y,s} = W_{e,s}$.
$\{$*Grund*: W_e könnte die endliche Menge A_y sein und damit $A_x = A_y$ werden.$\}$

$\{$*Beachte*: 0 wird nie entlassen.$\}$
Für alle gerade entlassenen x, berechne

$$b := 1 + \max \bigcup_{z \in \mathbb{N}} A_{z,s} \qquad (*)$$

und setze $A_{x,s+1} := \{0,\ldots,x+b\}$.

Ernennen: Falls $e := s_{.1}$ keinen Verfolger besitzt, ernenne das kleinste x zum Verfolger von e, das noch nie zu einem Verfolger (eines beliebigen y) ernannt wurde.

Aufzählen: Für alle x, e, so daß x Verfolger von e ist, setze $A_{x,s+1} := W_{e,s+1}$.

Ende von Stufe $s+1$

Verifizieren sie den Algorithmus. Gehen Sie dabei nach folgenden Schritten vor und benutzen Sie gegebenenfalls die Church'sche These:

(a) Das Maximum in (∗) existiert immer und kann effektiv berechnet werden.

(b) Die Relation *x ist nach Stufe s Verfolger von e* ist total berechenbar und der Schritt *Ernennen* kann immer effektiv durchgeführt werden.

(c) $A = \{(x, a)\colon\ a \in A_x\}$ ist r.a.

(d) Jedes e hat in jeder Stufe höchstens einen Verfolger.

(e) Jedes x wird genau einmal zu einem Verfolger ernannt.

(f) Jedes e besitzt genau einen Verfolger, der nie entlassen wird, oder ∞ viele Verfolger, die alle entlassen werden.

(g) $(\forall e)(\exists x)[W_e = A_x]$

(h) $(\forall x, y)[x \neq y \implies A_x \neq A_y]$

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`