



Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 5

Aufgabe 28 *Eindeutige Numerierung für $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ [Friedberg]*

Für $A \subseteq \mathbb{N}^2$ definieren wir $A_i := \{x : (i, x) \in A\}$. Eine r.a. Menge $A \subseteq \mathbb{N}^2$ heißt *eindeutige Numerierung* für $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, falls $(\forall i, j)[i \neq j \implies A_i \neq A_j]$.

Der folgende Algorithmus berechnet eine eindeutige Numerierung A von $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$. $A \subseteq \mathbb{N}^2$ wird durch endliche Approximation erzeugt. Hierzu werden die A_x für alle $x \in \mathbb{N}$ simultan in Stufen konstruiert. Wir nennen im folgenden x einen *Verfolger* von e , falls wir versuchen das Ziel $A_x = W_e$ zu erreichen. Verfolger werden während der Konstruktion *ernannt*, können aber auch wieder als solche *entlassen* werden. Solange x Verfolger von e ist, zählen wir W_e in A_x auf. Wird x entlassen, dann werden nur noch in der entsprechenden Stufe Elemente in A_x aufgezählt, d.h. A_x bleibt endlich.

$A_{x,s}$ bezeichnet die Menge der Elemente, die bis Stufe s in A_x aufgezählt wurden. Es ist also $A_x = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} A_{x,s}$. O.B.d.A. nehmen wir $W_0 = \mathbb{N}$ an.

Algorithmus zur Konstruktion von A

Stufe 0: Ernenne 0 zum Verfolger von 0. Für alle x setze $A_{x,0} := \emptyset$.

Stufe $s + 1$: $\{ \text{Invariante: } x \text{ Verfolger von } e \implies A_{x,s} = W_{e,s} \}$

Entlassen: Für alle x, e so daß x Verfolger von e ist, entlasse x , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) $(\exists i < e)[W_{i,s} \cap \{0, \dots, x\} = W_{e,s} \cap \{0, \dots, x\}]$
{Grund: W_i und W_e sehen „bis x ähnlich“ aus. Deshalb soll höchstens der kleinere Index i verfolgt werden.}
- (b) $x > 0$ und es gibt ein y , das schon entlassen wurde, mit $A_{y,s} = W_{e,s}$.
{Grund: W_e könnte die endliche Menge A_y sein und damit $A_x = A_y$ werden.}

{Beachte: 0 wird nie entlassen.}

Für alle gerade entlassenen x , berechne

$$b := 1 + \max_{z \in \mathbb{N}} \bigcup_{z \in \mathbb{N}} A_{z,s} \quad (*)$$

und setze $A_{x,s+1} := \{0, \dots, x + b\}$.

Ernennen: Falls $e := s.1$ keinen Verfolger besitzt, ernenne das kleinste x zum Verfolger von e , das noch nie zu einem Verfolger (eines beliebigen y) ernannt wurde.

Aufzählen: Für alle x, e , so daß x Verfolger von e ist, setze $A_{x,s+1} := W_{e,s+1}$.

Ende von Stufe $s + 1$

Verifizieren sie den Algorithmus. Gehen Sie dabei nach folgenden Schritten vor und benutzen Sie gegebenenfalls die Church'sche These:

- (a) Das Maximum in $(*)$ existiert immer und kann effektiv berechnet werden.
- (b) Die Relation x ist nach Stufe s Verfolger von e ist total berechenbar und der Schritt *Ernennen* kann immer effektiv durchgeführt werden.
- (c) $A = \{(x, a) : a \in A_x\}$ ist r.a.
- (d) Jedes e hat in jeder Stufe höchstens einen Verfolger.
- (e) Jedes x wird genau einmal zu einem Verfolger ernannt.
- (f) Jedes e besitzt genau einen Verfolger, der nie entlassen wird, oder ∞ viele Verfolger, die alle entlassen werden.
- (g) $(\forall e)(\exists x)[W_e = A_x]$
- (h) $(\forall x, y)[x \neq y \implies A_x \neq A_y]$

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>