Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

30. Mai 2001

Berechenbarkeit SS 01
Übungsblatt 3

Aufgabe 14

Betrachten Sie die durch

$$S_i := \{x \in W_{i.1} \colon\, x < i._2\}$$

gegebene Indizierung der endlichen Mengen. Wir benutzen die folgenden Notationen: X_i^{fin} bzw. W_i^{fin} für die characteristischen bzw. r. a. Indizes der endlichen Mengen und $A \succeq B$ für $\lambda i.A_i$ uniform überführbar in $\lambda i.B_i$. Zeigen sie:

(a) $D \succeq S$ und $S \succeq W^{\mathrm{fin}}$.

(b) Weder $X^{\mathrm{fin}} \succeq S$ noch $S \succeq X^{\mathrm{fin}}$.

(c) Weder $W^{\mathrm{fin}} \succeq S$ noch $S \succeq D$.

Aufgabe 15

(a) g heißt *Oberfunktion* von f ($f \sqsubseteq g$), falls $(\forall x)[f(x)\downarrow \implies g(x)\downarrow \wedge f(x) = g(x)]$.

Zeigen Sie, daß die Funktion $f \in P_1$, definiert durch

$$f := \lambda i. \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi_i(i)\downarrow = 0, \\ 1 & \text{falls } \varphi_i(i)\downarrow = 1, \\ \uparrow & \text{sonst,} \end{cases}$$

keine total berechenbare Oberfunktion besitzt.

(b) Zwei disjunkte Mengen A, B heißen *rekursiv untrennbar*, falls es keine entscheidbare Menge M gibt mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M^C$.

Geben Sie zwei rekursiv aufzählbare Mengen an, die rekursiv untrennbar sind.

(c) Besitzt jede endliche Funktion uniform eine total berechenbare Oberfunktion? D.h. existiert ein $h \in P_1$ mit:

$$(\forall i)[dom(\varphi_i) \text{ endlich } \implies (h(i)\downarrow \wedge \varphi_{h(i)} \in R_1 \wedge \varphi_i \sqsubseteq \varphi_{h(i)})]?$$

Aufgabe 16

Welche der folgenden Indexmengen sind rekursiv aufzählbar?

(a) $\{i\colon \varphi_i \text{ injektiv}\}$

(b) $\{i\colon \varphi_i \text{ nicht injektiv}\}$

(c) $\{i\colon \varphi_i \text{ surjektiv}\}$

(d) $\{i\colon 0 < \#W_i < \infty\}$

(e) $\{i\colon 0 < \#W_i < \infty \lor W_i = \mathbb{N}\}$

(f) $\{i\colon \varphi_i(0)\downarrow \land \varphi_{\varphi_i(0)} = f\}$, wobei $f \in P_1$.

Aufgabe 17

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_k = \{f(k)\}]$

(b) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_k = \{f(k)\}]$

(c) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_{f(k)} = \{f(k) + k\}]$

(d) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_{f(k)} = \{f(k) + k\}]$

(e) $(\exists m, n \in \mathbb{N})[W_n = \{m\} \land W_m = \{n + 1\}]$

Aufgabe 18

Gibt es zu jedem $f \in R_1$ mit $(\forall i)[\varphi_i \text{ total} \implies \varphi_{f(i)} \text{ total}]$ ein $e \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi_e = \varphi_{f(e)} \land \varphi_e$ total?

Aufgabe 19

Für $f \in P_1$ sei $\mathit{Fix}(f) := \{i\colon \varphi_i = \varphi_{f(i)}\}$. Zeigen Sie:

(a) $(\forall f)[\mathit{Fix}(f)$ besitzt unendliche r.a. Teilmenge$]$

(b) $(\exists f)[\mathit{Fix}(f)$ ist nicht r.a.$]$

(c) $(\forall f)[\mathit{Fix}(f) \text{ entscheidbar} \implies \{\varphi_i\colon i \in \mathit{Fix}(f)\} = P_1\}]$

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:
`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`