



Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 3

Aufgabe 14

Betrachten Sie die durch

$$S_i := \{x \in W_{i.1} : x < i.2\}$$

gegebene Indizierung der endlichen Mengen. Wir benutzen die folgenden Notationen: X_i^{fin} bzw. W_i^{fin} für die charakteristischen bzw. r. a. Indizes der endlichen Mengen und $A \succeq B$ für $\lambda i. A_i$ uniform überführbar in $\lambda i. B_i$. Zeigen sie:

- (a) $D \succeq S$ und $S \succeq W^{\text{fin}}$.
- (b) Weder $X^{\text{fin}} \succeq S$ noch $S \succeq X^{\text{fin}}$.
- (c) Weder $W^{\text{fin}} \succeq S$ noch $S \succeq D$.

Aufgabe 15

- (a) g heißt *Oberfunktion* von f ($f \sqsubseteq g$), falls $(\forall x)[f(x) \downarrow \implies g(x) \downarrow \wedge f(x) = g(x)]$.

Zeigen Sie, daß die Funktion $f \in P_1$, definiert durch

$$f := \lambda i. \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi_i(i) \downarrow = 0, \\ 1 & \text{falls } \varphi_i(i) \downarrow = 1, \\ \uparrow & \text{sonst,} \end{cases}$$

keine total berechenbare Oberfunktion besitzt.

- (b) Zwei disjunkte Mengen A, B heißen *rekursiv untrennbar*, falls es keine entscheidbare Menge M gibt mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M^C$.

Geben Sie zwei rekursiv aufzählbare Mengen an, die rekursiv untrennbar sind.

- (c) Besitzt jede endliche Funktion uniform eine total berechenbare Oberfunktion? D.h. existiert ein $h \in P_1$ mit:

$$(\forall i)[\text{dom}(\varphi_i) \text{ endlich} \implies (h(i) \downarrow \wedge \varphi_{h(i)} \in R_1 \wedge \varphi_i \sqsubseteq \varphi_{h(i)})]?$$

Aufgabe 16

Welche der folgenden Indexmengen sind rekursiv aufzählbar?

- (a) $\{i: \varphi_i \text{ injektiv}\}$
- (b) $\{i: \varphi_i \text{ nicht injektiv}\}$
- (c) $\{i: \varphi_i \text{ surjektiv}\}$
- (d) $\{i: 0 < \#W_i < \infty\}$
- (e) $\{i: 0 < \#W_i < \infty \vee W_i = \mathbb{N}\}$
- (f) $\{i: \varphi_i(0) \downarrow \wedge \varphi_{\varphi_i(0)} = f\}$, wobei $f \in P_1$.

Aufgabe 17

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_k = \{f(k)\}]$
- (b) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_k = \{f(k)\}]$
- (c) $(\forall f \in R_1)(\exists k)[W_{f(k)} = \{f(k) + k\}]$
- (d) $(\exists f \in R_1)(\forall k)[W_{f(k)} = \{f(k) + k\}]$
- (e) $(\exists m, n \in \mathbb{N})[W_n = \{m\} \wedge W_m = \{n + 1\}]$

Aufgabe 18

Gibt es zu jedem $f \in R_1$ mit $(\forall i)[\varphi_i \text{ total} \implies \varphi_{f(i)} \text{ total}]$ ein $e \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi_e = \varphi_{f(e)} \wedge \varphi_e \text{ total}$?

Aufgabe 19

Für $f \in P_1$ sei $Fix(f) := \{i: \varphi_i = \varphi_{f(i)}\}$. Zeigen Sie:

- (a) $(\forall f)[Fix(f) \text{ besitzt unendliche r.a. Teilmenge}]$
- (b) $(\exists f)[Fix(f) \text{ ist nicht r.a.}]$
- (c) $(\forall f)[Fix(f) \text{ entscheidbar} \implies \{\varphi_i: i \in Fix(f)\} = P_1]$

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>