Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

16. Mai 2001

Berechenbarkeit SS 01
Übungsblatt 2

Aufgabe 7

Welche der folgenden Eigenschaften von Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ sind rekursiv invariant?

(a) A ist rekursiv aufzählbar,

(b) $2\mathbb{N} \subseteq A$,

(c) $(\exists B \subseteq A)[B \equiv 2\mathbb{N}]$,

(d) A ist rechtseindeutig, d.h. $(\forall x, y, z)[\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in A \implies y = z]$,

(e) $(\exists f \in R_1)(\forall n)[\ \#\{x \in A\colon\ x \leq f(n)\} \geq n]$,

(f) χ_A primitiv rekursiv.

Aufgabe 8

Beweisen Sie: $\psi \in P_2$ ist genau dann Gödelnumerierung, wenn ψ eine Numerierung für P_1 und gegen Komposition uniform abgeschlossen ist, d.h. es gibt $h \in R_2$ mit $(\forall i, j)[\psi_{h(i,j)} = \psi_i \circ \psi_j]$.

Aufgabe 9

Welche der folgenden Familien von Funktionen besitzen eine Numerierung?

(a) $\{f \in P_1\colon\ \mathit{dom}(f)$ Anfangsabschnitt$\}$,

(b) $\{f \in P_1\colon\ f$ nicht surjektiv$\}$,

(c) Per,

(d) $\{f \in P_1\colon\ f$ injektiv$\}$,

(e) $\{f \in P_1\colon\ \#\,\mathit{dom}(f)$ gerade oder unendlich$\}$

(f) $R_1 \cup \{\lambda x.\uparrow\}$,

(g) $F - \{\delta\}$, wobei $F \subseteq P_1$ numerierbar, $\#F \geq 2$ und δ eine endliche Funktion ist.

Aufgabe 10

(a) $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$\psi(\langle i,0\rangle,0) := \uparrow, \psi(\langle i,p+1\rangle,0) := p, \psi(\langle i,p\rangle,x) := \varphi_i(x) \text{ für } x > 0.$$

Zeigen Sie: ψ ist eine Numerierung von P_1, aber keine Gödelnumerierung.

(b) Gibt es eine Gödelnumerierung ψ, so daß $\{i\colon\ \psi_i(0)\downarrow\}$ entscheidbar ist?

(c) Gibt es eine Numerierung ψ von P_1, so daß $\{i\colon\ \psi_i(i)\downarrow\}$ entscheidbar ist?

(d) Gibt es eine Gödelnumerierung ψ, so daß $\{2i\colon\ \psi_{2i}(2i)\downarrow\}$ entscheidbar ist?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen in uniformer Weise gelten (bzgl. den jeweils „natürlichen“ Indizierungen):

(a) $(\forall f\colon \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N})[f \in P_1 \iff \mathit{graph}(f) \text{ r.a.}]$

(b) Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ r.a. und $f \in P_1$, dann ist $f^{-1}(A)$ r.a.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, daß man für unendliche entscheidbare Mengen nicht uniform von r.a. zu monotonen Indizes übergehen kann.

Aufgabe 13

(a) Zeigen Sie: Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ r.a. ist, dann ist auch $\bigcup_{i\in A} W_i$ r.a. — dies gilt sogar in uniformer Weise.

(b) $A \subseteq \mathbb{N}$ sei entscheidbar. Ist dann auch $\bigcup_{i\in A} D_i$ entscheidbar?

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via: `http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`