



Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 2

Aufgabe 7

Welche der folgenden Eigenschaften von Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ sind rekursiv invariant?

- (a) A ist rekursiv aufzählbar,
- (b) $2\mathbb{N} \subseteq A$,
- (c) $(\exists B \subseteq A)[B \equiv 2\mathbb{N}]$,
- (d) A ist rechtseindeutig, d.h. $(\forall x, y, z)[\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in A \implies y = z]$,
- (e) $(\exists f \in R_1)(\forall n)[\#\{x \in A : x \leq f(n)\} \geq n]$,
- (f) χ_A primitiv rekursiv.

Aufgabe 8

Beweisen Sie: $\psi \in P_2$ ist genau dann Gödelnumerierung, wenn ψ eine Numerierung für P_1 und gegen Komposition uniform abgeschlossen ist, d.h. es gibt $h \in R_2$ mit $(\forall i, j)[\psi_{h(i,j)} = \psi_i \circ \psi_j]$.

Aufgabe 9

Welche der folgenden Familien von Funktionen besitzen eine Numerierung?

- (a) $\{f \in P_1 : \text{dom}(f) \text{ Anfangsabschnitt}\}$,
- (b) $\{f \in P_1 : f \text{ nicht surjektiv}\}$,
- (c) Per ,
- (d) $\{f \in P_1 : f \text{ injektiv}\}$,
- (e) $\{f \in P_1 : \#\text{dom}(f) \text{ gerade oder unendlich}\}$
- (f) $R_1 \cup \{\lambda x. \uparrow\}$,
- (g) $F - \{\delta\}$, wobei $F \subseteq P_1$ numerierbar, $\#F \geq 2$ und δ eine endliche Funktion ist.

Aufgabe 10

(a) $\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$\psi(\langle i, 0 \rangle, 0) := \uparrow, \psi(\langle i, p+1 \rangle, 0) := p, \psi(\langle i, p \rangle, x) := \varphi_i(x) \text{ für } x > 0.$$

Zeigen Sie: ψ ist eine Numerierung von P_1 , aber keine Gödelnumerierung.

- (b) Gibt es eine Gödelnumerierung ψ , so daß $\{i : \psi_i(0) \downarrow\}$ entscheidbar ist?
- (c) Gibt es eine Numerierung ψ von P_1 , so daß $\{i : \psi_i(i) \downarrow\}$ entscheidbar ist?
- (d) Gibt es eine Gödelnumerierung ψ , so daß $\{2i : \psi_{2i}(2i) \downarrow\}$ entscheidbar ist?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen in uniformer Weise gelten (bzgl. den jeweils „natürlichen“ Indizierungen):

- (a) $(\forall f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})[f \in P_1 \iff \text{graph}(f) \text{ r.a.}]$
- (b) Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ r.a. und $f \in P_1$, dann ist $f^{-1}(A)$ r.a.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, daß man für unendliche entscheidbare Mengen nicht uniform von r.a. zu monotonen Indizes übergehen kann.

Aufgabe 13

- (a) Zeigen Sie: Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ r.a. ist, dann ist auch $\bigcup_{i \in A} W_i$ r.a. — dies gilt sogar in uniformer Weise.
- (b) $A \subseteq \mathbb{N}$ sei entscheidbar. Ist dann auch $\bigcup_{i \in A} D_i$ entscheidbar?

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:
<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>