Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Prof. Dr. W. Menzel
Martin Giese

13. Juni 2001

Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, daß die Standard-Paarfunktion

$$\langle\ \rangle := \lambda x, y.\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie eine Ableitung aus den Grundfunktionen mittels Komposition und primitiver Rekursion angeben. Benutzen Sie Argumente der Form „Da f und g primitiv rekursiv sind, ist mittels Komposition/prim. Rek./ … auch … primitiv rekursiv.“ Notation mit κ^n_m, etc. ist nicht erforderlich.

(b) Sie können im folgenden benutzen, daß $+$, $*$ und $\leq$ primitiv rekursiv und die primitiv rekursiven Prädikate gegenüber $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ abgeschlossen sind.

Zeigen Sie, daß die Komponentenumkehrfunktionen $\lambda z.z_{.1}$ und $\lambda z.z_{.2}$ der Paarfunktion primitiv rekursiv sind.

(c) Zeigen Sie, daß die Fibonacci-Folge *fib* primitiv rekursiv ist:

$$\mathit{fib}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{0,1\}, \\ \mathit{fib}(x-1) + \mathit{fib}(x-2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine partiell rekursive, injektive Funktion. $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$f^{-1} := \lambda y. \begin{cases} x & \text{falls } y \in rg(f) \text{ und } f(x) = y, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f^{-1} auch partiell rekursiv?

Wenn ja, wird dies belegt durch folgende Beschreibung von f^{-1} im Formalismus der μ-rekursiven Funktionen:

$$f^{-1} = \lambda y.\mu x[f(x) = y]\ ?$$

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar? Bestimmen sie für die nicht entscheidbaren Mengen und deren Komplemente, ob sie rekursiv aufzählbar sind.

(a) $K := \{i\colon \varphi_i(i)\downarrow\}$

(b) $B := \{i\colon \varphi_i(i)\downarrow \text{ und } i < 10^{10}\}$

(c) $C := \{i\colon \varphi_i(i) \text{ terminiert in } i^2 \text{ Schritten}\}$

(d) $D := \{\langle e, i\rangle\colon \varphi_e(e)\uparrow \vee \varphi_i(i) \text{ terminiert in } \varphi_e(e) \text{ Schritten}\}$

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe des Substitutionstheorems (s_n^m-Theorems):

(a) $(\exists h \in R_2)[W_{h(x,y)} = W_x \cup W_y]$, wobei $W_i := dom(\varphi_i)$.

(b) $K_0 := \{i\colon \varphi_i(0)\downarrow\}$ ist unentscheidbar.

Aufgabe 5

Die *Ackermann Funktion* $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sei definiert durch:

$$A(0,n) = n+1 \qquad A(m+1,0) = A(m,1) \qquad A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n))$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\lambda n.A(m,n)$ primitiv rekursiv. (Vollst. Ind. über m.)

(b) Es existiert $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv mit $A(m,n) = \varphi_{a(m)}(n)$. ($s_n^m$-Theorem, Iteration.)

(c) A ist total berechenbar.

Aufgabe 6

(a) Ist die Menge $Prim := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f \text{ primitiv rekursiv}\}$ effektiv numerierbar, d.h. gibt es ein $h \in R_1$ mit $Prim = \{\varphi_{h(e)}\colon e \in \mathbb{N}\}$? (kurze, informelle Begründung)

(b) Zeigen Sie unter Benutzung von (a): Es gibt eine total berechenbare Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

`http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/`

Martin Giese: Informatik Neubau, Zi. 307, Tel. 608-4245, Email: `giese@ira.uka.de`