



Berechenbarkeit SS 01

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, daß die Standard-Paarfunktion

$$\langle \rangle := \lambda x, y. \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie eine Ableitung aus den Grundfunktionen mittels Komposition und primitiver Rekursion angeben. Benutzen Sie Argumente der Form „Da f und g primitiv rekursiv sind, ist mittels Komposition/prim. Rek./ ... auch ... primitiv rekursiv.“ Notation mit κ_m^n , etc. ist nicht erforderlich.

- (b) Sie können im folgenden benutzen, daß $+$, $*$ und $\leq$ primitiv rekursiv und die primitiv rekursiven Prädikate gegenüber $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ abgeschlossen sind.

Zeigen Sie, daß die Komponentenumkehrfunktionen $\lambda z. z.1$ und $\lambda z. z.2$ der Paarfunktion primitiv rekursiv sind.

- (c) Zeigen Sie, daß die Fibonacci-Folge fib primitiv rekursiv ist:

$$fib(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{0, 1\}, \\ fib(x-1) + fib(x-2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine partiell rekursive, injektive Funktion. $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$f^{-1} := \lambda y. \begin{cases} x & \text{falls } y \in rg(f) \text{ und } f(x) = y, \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f^{-1} auch partiell rekursiv?

Wenn ja, wird dies belegt durch folgende Beschreibung von f^{-1} im Formalismus der μ -rekursiven Funktionen:

$$f^{-1} = \lambda y. \mu x [f(x) = y] ?$$

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar? Bestimmen sie für die nicht entscheidbaren Mengen und deren Komplemente, ob sie rekursiv aufzählbar sind.

- (a) $K := \{i: \varphi_i(i) \downarrow\}$
- (b) $B := \{i: \varphi_i(i) \downarrow \text{ und } i < 10^{10}\}$
- (c) $C := \{i: \varphi_i(i) \text{ terminiert in } i^2 \text{ Schritten}\}$
- (d) $D := \{\langle e, i \rangle: \varphi_e(e) \uparrow \vee \varphi_i(i) \text{ terminiert in } \varphi_e(e) \text{ Schritten}\}$

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe des Substitutionstheorems (s_n^m -Theorems):

- (a) $(\exists h \in R_2)[W_{h(x,y)} = W_x \cup W_y]$, wobei $W_i := \text{dom}(\varphi_i)$.
- (b) $K_0 := \{i: \varphi_i(0) \downarrow\}$ ist unentscheidbar.

Aufgabe 5

Die *Ackermann Funktion* $A: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch:

$$A(0, n) = n + 1 \quad A(m + 1, 0) = A(m, 1) \quad A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$$

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\lambda n. A(m, n)$ primitiv rekursiv. (Vollst. Ind. über m .)
- (b) Es existiert $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv mit $A(m, n) = \varphi_{a(m)}(n)$. (s_n^m -Theorem, Iteration.)
- (c) A ist total berechenbar.

Aufgabe 6

- (a) Ist die Menge $\text{Prim} := \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f \text{ primitiv rekursiv}\}$ effektiv numerierbar, d.h. gibt es ein $h \in R_1$ mit $\text{Prim} = \{\varphi_{h(e)}: e \in \mathbb{N}\}$? (kurze, informelle Begründung)
- (b) Zeigen Sie unter Benutzung von (a): Es gibt eine total berechenbare Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist.

Die Unterlagen zur Vorlesung und zu den Übungen sind erhältlich via:

<http://i11www.ira.uka.de/~giese/brb01/>