Karlsruher Institut für Technologie

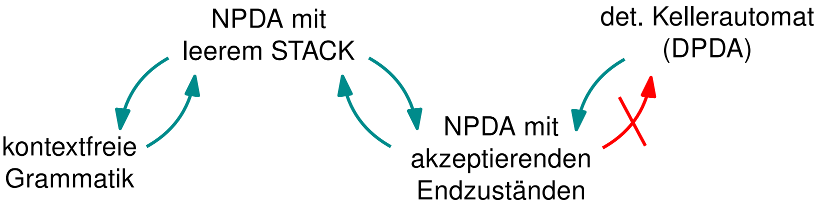
Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 2.2.2023

Torsten Ueckerdt | 2. Februar 2023

Letzte Vorlesung: Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.
Jede durch einen NPDA durch leeren STACK akzeptierte Sprache ist kontextfrei.



Wiederholung: Kellerautomaten

Definition.

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, wobei

- Q Zustandsmenge, $q_0 \in Q$ Anfangszustand, Σ Eingabealphabet
- Γ endliches STACK-Alphabet, $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ Übergangsrelation, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$

Wiederholung: Kellerautomaten

Definition.

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, wobei

- Q Zustandsmenge, $q_0 \in Q$ Anfangszustand, Σ Eingabealphabet
- Γ endliches STACK-Alphabet, $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ Übergangsrelation, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$

Eine Konfiguration eines NPDA ist ein Tripel (q, w, α) mit

- $q \in Q$,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Wiederholung: Kellerautomaten

Eine Konfiguration eines NPDA ist ein Tripel (q, w, α) mit

- $q \in Q$,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Definition.

Ein NPDA akzeptiert ein $w \in \Sigma^*$ durch leeren STACK, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Wiederholung: Kellerautomaten

Eine Konfiguration eines NPDA ist ein Tripel (q, w, α) mit

- $q \in Q$,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Definition.

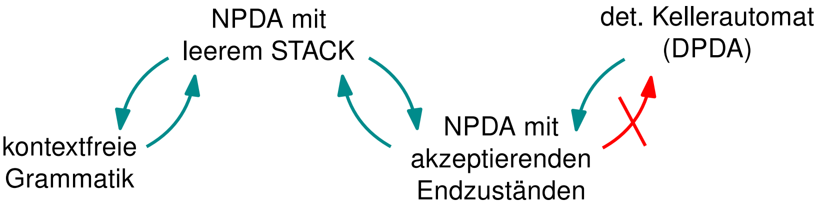
Ein NPDA akzeptiert ein $w \in \Sigma^*$ durch leeren STACK, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ziel:
Für jeden beliebigen NPDA $\mathcal{A}$ der eine Sprache L durch leeren STACK akzeptiert, konstruiere eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$.

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.

Jede durch einen NPDA durch leeren STACK akzeptierte Sprache ist kontextfrei.



Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ NPDA, der $L_{\mathcal{A}}$ durch leeren STACK akzeptiert.
- Wir geben eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $L_{\mathcal{A}} = L(G)$ an.

Die Konstruktion von G heißt Tripelkonstruktion.

- Setze $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- Sei S Startsymbol.

Ziel: Aus $[q, X, p]$ sollen genau die $w \in \Sigma^*$ ableitbar sein, für die es eine Abarbeitung von $\mathcal{A}$ gibt,

- die im Zustand q mit STACK-Inhalt X beginnt und
- nach Lesen von w im Zustand p mit leerem STACK endet.

Beweis: NPDA $\to$ kontextfreie Grammatik

Karlsruher Institut für Technologie

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ NPDA, der $L_\mathcal{A}$ durch leeren STACK akzeptiert.
- Wir geben eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $L_\mathcal{A} = L(G)$ an.

Die Konstruktion von G heißt Tripelkonstruktion.

- Setze $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- Sei S Startsymbol.

Die Regelmenge R ist gegeben durch

- $S \to [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- $[q, X, q_{m+1}] \to a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle Möglichkeiten $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$,
  falls $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$,
- insbes. $[q, X, p] \to a$ falls $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, X)$.

Notation

- Eine Konfiguration eines NPDAs ist (q, w, α) mit q aktueller Zustand, w noch zu lesende Eingabe, α aktueller STACK-Inhalt.
- Für einen Schritt von Konfiguration (q, w, α) zu Konfiguration (p, w', β) schreiben wir
$$(q, w, \alpha) \vdash (p, w', \beta).$$
- Für eine Folge von Konfigurationen (q, w, α) nach (p, w', β) schreiben wir auch
$$(q, w, \alpha) \overset{*}{\vdash} (p, w', \beta)$$
- beziehungsweise
$$(q, w, \alpha) \overset{k}{\vdash} (p, w', \beta)$$

  für eine Folge von genau k Konfigurationen.

Beweis: NPDA $\rightarrow$ kontextfreie Grammatik

Wir werden per Induktion beweisen, dass für alle $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$ und $w \in L$ gilt:

$$[q, X, p] \xrightarrow{*} w \text{ in } G \iff (q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Aus dieser Behauptung folgt dann

$$\begin{aligned} w \in L_{\mathcal{A}} &\iff \exists p \in Q \text{ mit } (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)\text{, wobei } (q_0, w, Z_0) \text{ Anfangskonfiguration von } \mathcal{A} \text{ ist} \\ &\iff \exists p \in Q \text{ mit } [q_0, Z_0, p] \xrightarrow{*} w \\ &\iff \exists p \in Q \text{ mit } S \rightarrow [q_0, Z_0, p] \xrightarrow{*} w \\ &\iff w \in L(G) \end{aligned}$$

Beweis: NPDA $\rightarrow$ kontextfreie Grammatik

Richtung:

- $[q, X, p] \xrightarrow{*} w$ in $G \quad \Longrightarrow \quad (q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

Beschreibung:

- Induktion über die Länge k einer Ableitung $[q, X, p] \xrightarrow{k} w$ in G

Beweis: NPDA $\rightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \xrightarrow{k} w \text{ in } G$$

$$\Downarrow$$

$$(q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Induktionsanfang:

- Für $k = 1$ gilt, dass $[q, X, p] \rightarrow w$ eine Regel in G ist.
- Also ist $(p, \varepsilon) \in \delta(q, w, X)$ und $|w| = 1$.
- Also gibt es die Abarbeitung $(q, w, X) \overset{1}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$ in $\mathcal{A}$.

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \to a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$ für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Induktionsschritt:

- Betrachte eine Ableitung $[q, X, p] \xrightarrow{k} w$.
- Schreibe diese als

$$[q, X, p] \to a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}] \xrightarrow{k-1} w,$$

wobei $q_{m+1} = p$ und $w = aw_1 \cdots w_m$, mit $w_i \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ und $[q_j, Y_j, q_{j+1}] \xrightarrow{k'} w_j$ mit $k' \leq k - 1$ für alle $1 \leq j \leq m$.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \xrightarrow{k} w \text{ in } G$$

$$\Downarrow$$

$$(q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: NPDA $\to$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \to a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$ für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \xrightarrow{k} w \text{ in } G$$
$$\Downarrow$$
$$(q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: $(q_j, w_j, Y_j) \overset{*}{\vdash} (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon)$ für alle $1 \leq j \leq m$.
- Also $(q_j, w_j, Y_j \cdots Y_m) \overset{*}{\vdash} (q_{j+1}, \varepsilon, Y_{j+1} \cdots Y_m)$ für alle $1 \leq j \leq m$.
- Damit $$\begin{aligned}(q, w, X) &\vdash (q_1, w_1 \cdots w_m, Y_1 \cdots Y_m)\\ &\overset{*}{\vdash} (q_2, w_2 \cdots w_m, Y_2 \cdots Y_m)\\ &\overset{*}{\vdash} (q_3, w_3 \cdots w_m, Y_3 \cdots Y_m)\\ &\overset{*}{\vdash} \cdots \overset{*}{\vdash} (q_m, w_m, Y_m) \overset{*}{\vdash} (q_{m+1}, \varepsilon, \varepsilon) = (p, \varepsilon, \varepsilon)\end{aligned}$$

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

Richtung:

- $[q, X, p] \overset{*}{\longrightarrow} w$ in $G \quad \Longleftarrow \quad (q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

Beschreibung:

- Induktion über die Länge k einer Abarbeitung $(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \longrightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Induktionsanfang:

- Für $k = 1$ folgt aus $(q, w, X) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$, dass
  - $|w| = 1$ und
  - $(p, \varepsilon) \in \delta(q, w, X)$.
- Dann ist $[q, X, p] \longrightarrow w$ eine Regel von G.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \overset{*}{\longrightarrow} w \text{ in } G$$

$$\Uparrow$$

$$(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: NPDA $\rightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Induktionsschritt:

- Betrachte eine Abarbeitung $(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$
- Zerlege $w = aw'$ wobei
  - $a = \varepsilon$, falls der erste Schritt von $\mathcal{A}$ ein ε-Übergang ist
  - $a \in \Sigma$, also der erste Buchstabe von w, sonst.
- Sei $(q_1, w', Y_1 \cdots Y_m)$ die Konfiguration von $\mathcal{A}$ nach dem 1. Schritt.
- Dann gilt $(q, aw', X) \vdash (q_1, w', Y_1 \cdots Y_m) \overset{k'}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$
  mit $k' = k - 1$.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \overset{*}{\rightarrow} w \text{ in } G$$

$$\Uparrow$$

$$(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \longrightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Sei

$$w' = w_1 \cdots w_m \text{ Zerlegung von } w \text{ mit } w_j \in \Sigma^*$$

so, dass $\mathcal{A}$ startend mit der Konfiguration

$$(q_1, w', Y_1 \cdots Y_m)$$

bei der betrachteten Abarbeitung gerade nach dem Lesen von $w_1 \cdots w_j$ zum ersten Mal den STACK-Inhalt $Y_{j+1} \cdots Y_m$ erzeugt. Sei q_{j+1} der zu diesem Zeitpunkt erreichte Zustand.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \xrightarrow{*} w \text{ in } G$$

$$\Uparrow$$

$$(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \longrightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Dann gilt: $q_{m+1} = p$ und

$$(q_j, w_j \cdots w_m, Y_j \cdots Y_m) \overset{k'}{\vdash} (q_{j+1}, w_{j+1} \cdots w_m, Y_{j+1} \cdots Y_m),$$

$k' \leq k - 1$, und während der gesamten Abarbeitung liegt $Y_{j+1} \cdots Y_m$ ungelesen auf dem STACK.
Also gilt auch

$$(q_j, w_j, Y_j) \overset{k'}{\vdash} (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon).$$

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \overset{*}{\longrightarrow} w \text{ in } G$$

$$\Uparrow$$

$$(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: NPDA $\longrightarrow$ kontextfreie Grammatik

- $V := \{[q, X, p] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$.
- $[q, X, q_{m+1}] \longrightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$
  für alle $q_2, q_3, \ldots, q_{m+1} \in Q$, mit $(q_1, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \in \delta(q, a, X)$.

Wir zeigen:

$$[q, X, p] \xrightarrow{*} w \text{ in } G$$
$$\Uparrow$$
$$(q, w, X) \overset{k}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Also gilt auch

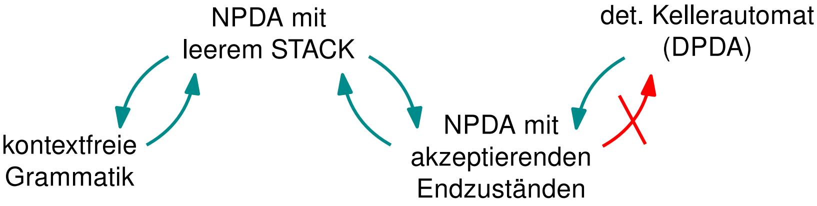
$$(q_j, w_j, Y_j) \overset{k'}{\vdash} (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon).$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt daraus, dass $[q_j, Y_j, q_{j+1}] \xrightarrow{*} w_j$ in G existiert. Damit erhalten wir, dass auch

$[q, X, p] \longrightarrow a[q_1, Y_1, q_2][q_2, Y_2, q_3] \cdots [q_m, Y_m, q_{m+1}] \xrightarrow{*} aw_1 \cdots w_m = w$

in G existiert.

Übersicht



Korollar.

Die Klasse der von nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen ist gleich der Klasse der kontextfreien Sprachen.

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

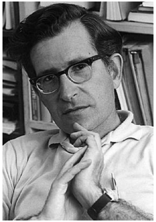
Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	DTM / NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$ (offen, ob $\mathcal{NTAPE}(n) = \mathcal{DTAPE}(n)$)
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA

Korollar.
Die Klasse der von nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen ist gleich der Klasse der kontextfreien Sprachen.

Exkurs

Wofür braucht man eigentlich Grammatiken und Berechnungsmodelle wie endliche Automaten oder Turingmaschinen?

- Die Chomsky-Hierarchie wurde 1956 von dem Linguisten Noam Chomsky entworfen. Ursprünglich war sie als Mittel zur Beschreibung natürlicher Sprachen gedacht (hat sich nicht erfüllt).
- Grammatiken und Automaten sind fundamental für die Beschreibung von Programmiersprachen.
- XML basiert auf sogenannten Dokumenttypdefinitionen (DTD). Diese sind kontextfreie Grammatiken.



Noam Chomsky
(geb. 1928, hier um 1960)

Zwischenfazit zu kontextfreien Grammatiken

- Es kann in polynomialer Laufzeit entschieden werden, ob zu einer kontextfreien Grammatik G die Sprache $L(G)$ leer bzw. endlich ist.

  $\Rightarrow$ Entfernung nutzloser Variablen (vgl. VL 15)

- Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist in polynomialer Laufzeit entscheidbar.

  $\Rightarrow$ Chomsky-Normalform und CYK-Algorithmus (vgl. VL 14)

- Für kontextfreie Grammatiken G, G_1 und G_2 sind auch die Sprachen $L(G)^*$, $L(G_1) \cup L(G_2)$ und $L(G_1) \cdot L(G_2)$ kontextfrei.

  $\Rightarrow$ (vgl. VL 15)

- Kontextfreie Sprachen sind genau die Sprachen, die von nichtdet. Kellerautomaten (NPDAs) akzeptiert werden.

  $\Rightarrow$ Tripelkonstruktion (vgl. VL 16 & heute)

Unentscheidbare Probleme für kontextfreie Grammatiken

Satz.

Das Problem für kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 zu entscheiden, ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ist, ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbare Probleme für kontextfreie Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Satz.

Das Problem für kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 zu entscheiden, ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ist, ist nicht entscheidbar.

Beweisskizze:

- Wir beweisen, dass aus der Entscheidbarkeit von $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ die Entscheidbarkeit des Post'schen Korrespondenzproblems (PKP) folgt.
- Dies ist ein Widerspruch zur Nichtentscheidbarkeit des PKP.
- Wir geben für jede PKP-Instanz K kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 an, so dass es ein Wort $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ genau dann gibt, wenn es eine Lösung für K gibt.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem.

Gegeben ist endliche Folge von Wortpaaren

$$K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \in \Sigma^+$ und $y_i \in \Sigma^+$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$ gilt.

Beweis

- Gegeben sei PKP-Instanz $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ über Alphabet Σ.
- Es sei $\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1, \dots, a_k\}$ für neue Symbole $a_1, \dots, a_k$.
- Es sei $G_1 = (\Sigma', V_1 = \{S_1\}, S_1, R_1)$ mit Regeln
$$S_1 \longrightarrow a_i x_i \text{ und } S_1 \longrightarrow a_i S_1 x_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k;$$
- Es sei $G_2 = (\Sigma', V_2 = \{S_2\}, S_2, R_2)$ mit Regeln
$$S_2 \longrightarrow a_i y_i \text{ und } S_2 \longrightarrow a_i S_2 y_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(G_1) &= \{a_{i_n} \cdots a_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_j \leq k\} \\ L(G_2) &= \{a_{i_n} \cdots a_{i_1} y_{i_1} \cdots y_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_j \leq k\}\ . \end{aligned}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
K &= ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)) \\
L(G_1) &= \{a_{i_n} \cdots a_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_j \leq k\} \\
L(G_2) &= \{a_{i_n} \cdots a_{i_1} y_{i_1} \cdots y_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_j \leq k\}\ .
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
K \text{ hat Lösung} &\Leftrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \text{ mit } x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n} \\
&\Leftrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \text{ mit } a_{i_n} \cdots a_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} = a_{i_n} \cdots a_{i_1} y_{i_1} \cdots y_{i_n} \\
&\Leftrightarrow \exists w \in L(G_1) \cap L(G_2) \\
&\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Eindeutigkeit von kontextfreien Grammatiken

Definition.

Eine Grammatik G ist eindeutig, wenn es für jedes $w \in L(G)$ genau einen Syntaxbaum gibt.

Satz.

Das Problem, für eine kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob sie eindeutig ist, ist nicht entscheidbar.

G is nicht eindeutig $\iff$ es gibt $w \in L(G)$ mit mindestens zwei verschiedenen Syntaxbäumen

Eindeutigkeit von kontextfreien Grammatiken

Definition.

Eine Grammatik G ist eindeutig, wenn es für jedes $w \in L(G)$ genau einen Syntaxbaum gibt.

Satz.

Das Problem, für eine kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob sie eindeutig ist, ist nicht entscheidbar.

G is nicht eindeutig $\iff$ es gibt $w \in L(G)$ mit mindestens zwei verschiedenen Syntaxbäumen

Beweisskizze.

- Annahme: Es sei entscheidbar, ob eine kontextfreie Grammatik nicht eindeutig ist.
- Dann könnten wir das PKP entscheiden.
- Dies ist ein Widerspruch.

Beweis

- Gegeben sei PKP-Instanz $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ über Alphabet Σ.
- Seien $G_1 = (\Sigma', V_1, S_1, R_1)$ und $G_2 = (\Sigma', V_2, S_2, R_2)$ wie im letzten Beweis.
- Wir konstruieren eine neue Grammatik $G = (\Sigma', V, S, R)$, die genau dann <u>nicht</u> eindeutig ist, wenn $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \text{ wobei } S \text{ neues Startsymbol} \\ R &= R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\} \end{aligned}$$

- Da G_1 und G_2 eindeutig sind, existiert $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ genau dann, wenn es in G Ableitungen $S \rightarrow S_1 \xrightarrow{*} w$ und $S \rightarrow S_2 \xrightarrow{*} w$ gibt, also G <u>nicht</u> eindeutig ist.

Sprache der korrekten Rechenwege

- Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, F)$ eine TM.
- Eine Berechnung von $\mathcal{M}$ kann durch die Folge der durchlaufenen

  Konfigurationen $\alpha(q)\beta$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ und $q \in Q$

  beschrieben werden.
- $\alpha(q)\beta$ bedeutet, dass
  - auf dem Band das Wort $\alpha\beta$, umgeben von Blanksymbolen, steht,
  - die Turingmaschine im Zustand q ist
  - und der Lese-/Schreibkopf auf die Stelle des Bandes, an der das erste Symbol von β steht, zeigt.
- Wenn $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Abfolge der Konfigurationen einer Berechnung von $\mathcal{M}$ ist, so kann dieser Rechenweg durch das Wort $w_1\#w_2\#\cdots\#w_n\#$, mit $\# \notin \Gamma$ Trennsymbol, kodiert werden.
- Hierbei sei (q) für $q \in Q$ ein einziges Zeichen.

Sprache der korrekten Rechenwege

- Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, F)$ eine TM.
- Wenn $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Abfolge der Konfigurationen einer Berechnung von $\mathcal{M}$ ist, so kann dieser Rechenweg durch das Wort $w_1 \# w_2 \# \cdots \# w_n \#$, mit $\# \notin \Gamma$ Trennsymbol, kodiert werden.
- Hierbei sei (q) für $q \in Q$ ein einziges Zeichen.
- Allerdings lässt sich die Sprache aller Wörter, die in dieser Weise die korrekten Rechenwege einer TM kodieren, nicht unbedingt durch kontextfreie Grammatiken beschreiben.
- Daher wird ein “Trick” angewendet und jede zweite Konfiguration gespiegelt kodiert.

Sprache der korrekten Rechenwege

Definition.

Die **Sprache B$_{\mathcal{M}}$ der korrekten Rechenwege einer TM** $\mathcal{M}$ besteht aus allen Worten

$$w_1\#w_2^R\#w_3\#w_4^R \cdots w_n^R\#, \text{ falls } n \text{ gerade und}$$
$$w_1\#w_2^R\#w_3\#w_4^R \cdots w_n\#, \text{ falls } n \text{ ungerade,}$$

wobei

- die w_i, $1 \leq i \leq n$, Konfigurationen von $\mathcal{M}$ sind,
- w_1 eine Anfangskonfiguration,
- w_n eine akzeptierende Konfiguration und
- für alle $1 \leq i \leq n-1$ die Konfiguration w_{i+1} die direkte Nachfolgekonfiguration von w_i bei einer korrekten Berechnung von $\mathcal{M}$

ist.

Sprache der korrekten Rechenwege

Lemma.

Für alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ ist $B_{\mathcal{M}}$ der Durchschnitt zweier Sprachen

- $L_1 = L(G_1)$
- $L_2 = L(G_2)$,

wobei G_1 und G_2 kontextfreie Grammatiken sind.

Beweis

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, F)$ eine Turing-Maschine.
Wir konstruieren L_1 und L_2 aus den Sprachen

$$\begin{aligned} L &:= \{u\#v^R \mid v \text{ ist direkte Nachfolgekonfiguration von } u \text{ für } \mathcal{M}\} \\ L' &:= \{v^R\#u \mid u \text{ ist direkte Nachfolgekonfiguration von } v \text{ für } \mathcal{M}\} \\ E &:= \{\varepsilon\} \cup (\Gamma^* \cdot \{(q) \mid q \in F\} \cdot \Gamma^* \cdot \{\#\}) \end{aligned}$$

Falls L und L' kontextfrei sind, so sind auch

$$\begin{aligned} L_1 &:= (L \cdot \{\#\})^* \cdot E \\ L_2 &:= \{(q_0)\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\#\} \cdot (L' \cdot \{\#\})^* \cdot E \end{aligned}$$

kontextfrei.

Beweis

$$
\begin{aligned}
L &:= \{u\#v^R \mid v \text{ ist direkte Nachfolgekonfiguration von } u \text{ für } \mathcal{M}\}\\
L' &:= \{v^R\#u \mid u \text{ ist direkte Nachfolgekonfiguration von } v \text{ für } \mathcal{M}\}\\
E &:= \{\varepsilon\} \cup (\Gamma^* \cdot \{(q) \mid q \in F\} \cdot \Gamma^* \cdot \{\#\})\\
L_1 &:= (L \cdot \{\#\})^* \cdot E\\
L_2 &:= \{(q_0)\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\#\} \cdot (L' \cdot \{\#\})^* \cdot E
\end{aligned}
$$

Offensichtlich haben alle Wörter aus L_1 die Form

$$w_1\#w_2^R\#\cdots w_{2i-1}\#w_{2i}^R\# \text{ oder}$$
$$w_1\#w_2^R\#\cdots w_{2i-1}\#w_{2i}^R\#w_{2i+1}\#$$

wobei für alle $1 \leq j \leq i$ gilt

- w_j ist Konfiguration von $\mathcal{M}$
- w_{2j} ist direkte Nachfolgekonfiguration von w_{2j-1}

und w_{2i+1} ist akzeptierende Konfiguration, falls vorhanden.

Beweis

Analog haben alle Wörter aus L_2 die Form

$$w_1 \# w_2^R \# \cdots w_{2i-1} \# w_{2i}^R \# \text{ oder}$$
$$w_1 \# w_2^R \# \cdots w_{2i-2}^R \# w_{2i-1} \#$$

wobei für alle $1 \leq j \leq i - 1$ gilt

- w_j ist Konfiguration von $\mathcal{M}$,
- w_1 ist Anfangskonfiguration,
- w_{2j+1} ist direkte Nachfolgekonfiguration von w_{2j}

und w_{2i} ist akzeptierende Konfiguration, falls vorhanden.

Dann ist $B_{\mathcal{M}} = L_1 \cap L_2$.

Beweis

$$L := \{u\#v^R \mid v \text{ ist direkte Nachfolgekonfiguration von } u \text{ für } \mathcal{M}\}$$

Wir geben nun eine kontextfreie Grammatik G für L an mit Startvariable S und zusätzlicher Variable A.

G enthalte folgende Regeln:

(i) alle Regeln $S \longrightarrow aSa$, $a \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$;

(ii) für alle Übergänge $\delta(q, a) = (q', b, R)$ von $\mathcal{M}$ die Regeln $S \longrightarrow (q)aA(q')b$;

(iii) für alle Übergänge $\delta(q, a) = (q', b, L)$ von $\mathcal{M}$ und alle $x \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ die Regeln $S \longrightarrow x(q)aAbx(q')$;

(iv) für alle Übergänge $\delta(q, a) = (q', b, N)$ von $\mathcal{M}$ die Regeln $S \longrightarrow (q)aAb(q')$;

(v) für alle $a \in \Gamma$ die Regeln $A \longrightarrow aAa$;

(vi) die Regel $A \longrightarrow \#$.

Beweis

- Analog kann eine kontextfreie Grammatik G' für L' angegeben werden.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $L(G) = L$ und $L(G') = L'$ ist.
- Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beweis

- Analog kann eine kontextfreie Grammatik G' für L' angegeben werden.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $L(G) = L$ und $L(G') = L'$ ist.
- Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma.

Für alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ ist $B_{\mathcal{M}}$ der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen.

Bemerkung.

Falls $\mathcal{M}$ in jeder Berechnung nur höchstens einen Rechenschritt ausführt, ist $B_{\mathcal{M}}$ sogar selbst kontextfrei.

Weiterhin gilt ...

Lemma.

Für alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ ist $B_{\mathcal{M}}$ der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen.

Bemerkung.

Falls $\mathcal{M}$ in jeder Berechnung nur höchstens einen Rechenschritt ausführt, ist $B_{\mathcal{M}}$ sogar selbst kontextfrei.

Lemma.

Sei $\mathcal{M}$ eine TM, die auf jeder Eingabe mindestens zwei Rechenschritte ausführt. Dann ist die Sprache $B_{\mathcal{M}}$ genau dann kontextfrei, wenn $L(\mathcal{M})$ endlich ist.

Ohne Beweis.

Zusammenfassung Chomsky-Hierarchie

Testen Sie sich:

- Können Sie folgende Tabelle ausfüllen?
- Welche Ergebnisse sind aus der heutigen Vorlesung?

Chomsky-Typ	Regeln in der Grammatik	Komplexität des Wortproblems	zugehöriges Maschinenmodell	Beispielsprache
Typ 0				
Typ 1				
Typ 2				
Typ 3				