Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 24.11.2022

Torsten Ueckerdt | 24. November 2022

Letzte Vorlesung

Bearbeitet eine TM $\mathcal{M}$ eine Eingabe w, so gibt es drei Möglichkeiten:

1. $\mathcal{M}$ "läuft" in einen Zustand in F. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ akzeptiert w	**2.** $\mathcal{M}$ "läuft" in einen Übergang $\delta(q, a) = (q, a, N)$. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ lehnt w ab	**3.** $\mathcal{M}$ "läuft" unendlich lange. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ stoppt nicht

Für eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und Sprache L definieren wir:

$\mathcal{M}$ **hält**	**1.** oder **2.**	
$\mathcal{M}$ **akzeptiert** L, (L semi-entscheidbar)	$\forall w \in L$: **1.**	$\forall w \notin L$: **2.** oder **3.**
$\mathcal{M}$ **entscheidet** L, (L entscheidbar)	$\forall w \in L$: **1.**	$\forall w \notin L$: **2.**

Letzte Vorlesung - Die Diagonalsprache

- T_{w_i} ist die Turing-Maschine mit Gödelnummer w_i.
- $L_d := \{w_i : T_{w_i} \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\} = \{\langle \mathcal{M} \rangle : \mathcal{M} \text{ akzeptiert } \langle \mathcal{M} \rangle \text{ nicht}\}$
- L_d enthält also alle Gödelnummern von Turing-Maschinen, die ihre eigene Gödelnummer als Eingabe nicht akzeptieren.

Satz.

Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Beweisidee

- Wäre $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine die L_d entscheidet, dann müsste $\mathcal{M}$ die Eingabe $\langle \mathcal{M} \rangle$ gleichzeitig akzeptieren und ablehnen.

Korollar

Korollar

Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Korollar

Korollar

Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \backslash L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Wäre L_d^c entscheidbar, so existierte eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese könnte aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.

Wer rasiert den Barbier?

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.

Wer rasiert den Barbier?

Daniel Düsentrieb behauptet, eine allwissende Maschine erfunden zu haben. Man stellt eine Ja/Nein-Frage und die Antwort leuchtet auf. Dagobert Duck kauft die Maschine. Will aber nur bei korrekter Antwort zahlen. Er stellt der Maschine die Frage: Wirst du mit **Nein** antworten?

Was passiert?

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.

Wer rasiert den Barbier?

Daniel Düsentrieb behauptet, eine allwissende Maschine erfunden zu haben. Man stellt eine Ja/Nein-Frage und die Antwort leuchtet auf. Dagobert Duck kauft die Maschine. Will aber nur bei korrekter Antwort zahlen. Er stellt der Maschine die Frage: Wirst du mit **Nein** antworten?

Was passiert?

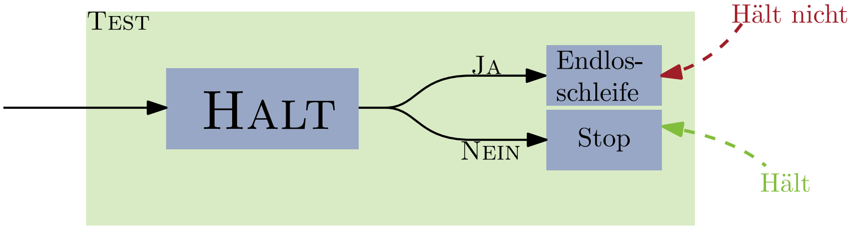
Ein Gottheit behauptet allmächtig zu sein. Sie bekommt die Aufgabe:

Erschaffe einen Stein der so schwer ist, dass Du ihn selbst nicht heben kannst!

Halteproblem

Programm HALT:

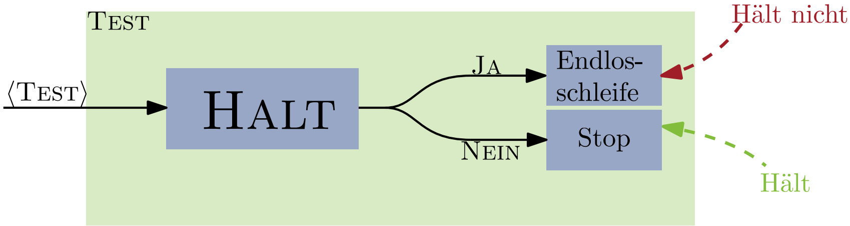
Programm TEST:



Halteproblem

Programm HALT:

Programm TEST:



Wie verhält sich TEST bei der Eingabe ⟨TEST⟩?

Das Halteproblem

Definition.

Das **Halteproblem** ist definiert als folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{w\#v\colon\ T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}.$$

Satz.

$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe w stoppt, ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Definition.

Das **Halteproblem** ist definiert als folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{w\#v \colon T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}.$$

Beachte: Wir benutzen ein Trennzeichen $\# \notin \Sigma$.

Satz.

$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe w stoppt, ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Satz.

$\mathcal{H} = \{w\#v\colon T_w$ hält auf der Eingabe $v\}$ ist nicht entscheidbar.

Erinnerung:

$w = w_i \in L_d^c$
$\Leftrightarrow \mathcal{M}_i$ akzeptiert w_i
mit $w_i = \langle \mathcal{M}_i \rangle$

Beweis:

- Angenommen es existiert eine stets haltende Turing-Maschine, die $\mathcal{H}$ entscheidet.
- Wir konstruieren daraus eine stets haltende Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet, mit Widerspruch zum Korollar letzte Vorlesung.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \# w_i$ an.

Das Halteproblem

Satz.

$\mathcal{H} = \{w\#v : T_w$ hält auf der Eingabe $v\}$ ist nicht entscheidbar.

Erinnerung:

$w = w_i \in L_d^c$
$\Leftrightarrow \mathcal{M}_i$ akzeptiert w_i
mit $w_i = \langle \mathcal{M}_i \rangle$

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \# w_i$ an.

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \# w_i$ nicht akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ nicht auf w_i.
- Also ist $w_i \in L_d$ und damit $w_i \notin L_d^c$.
- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \# w_i$ akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ auf w_i.
- Dann können wir auf der universellen Turing-Maschine die Berechnung von $\mathcal{M}_i$ auf w_i simulieren und so entscheiden, ob $\mathcal{M}_i$ die Eingabe w_i akzeptiert, also ob $w_i \in L_d^c$.

Die Universelle Sprache

- Die universelle Sprache L_u über $\{0,1\}$ ist definiert durch $L_u := \{w\#v\colon\ v \in L(T_w)\}$.
- L_u ist also die Menge aller Wörter $w\#v$ für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Satz.

Die universelle Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

Die Universelle Sprache

- Die universelle Sprache L_u über $\{0,1\}$ ist definiert durch $L_u := \{w\#v \colon v \in L(T_w)\}$.
- L_u ist also die Menge aller Wörter $w\#v$ für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Satz.
Die universelle Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Wir zeigen, dass L_u eine Verallgemeinerung von L_d^c ist.
- Wir nehmen an, dass es eine TM gibt, die L_u entscheidet.
- Dann zeigen wir, dass wir damit auch L_d^c entscheiden können:
  - Berechne das i, für das $w = w_i$.
  - Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
  - Wende die Turing-Maschine für L_u auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \# w_i$ an.

Wäre L_u entscheidbar, so auch L_d^c im Widerspruch zum Korollar letzte Vorlesung.

Die Universelle Sprache

Satz.

Die universelle Sprache $L_u := \{w\#v\colon\ v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz.

Die universelle Sprache $L_u := \{w\#v\colon\ v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:

Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe $w\#v$:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert $w\#v$.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird $w\#v$ von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Die Universelle Sprache

Satz.

Die universelle Sprache $L_u := \{w\#v\colon\ v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:

Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe $w\#v$:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert $w\#v$.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird $w\#v$ von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Bemerkung: Die Begriffe entscheidbar und semi-entscheidbar unterscheiden sich tatsächlich.

Satz von Rice – Motivation

- Wir haben bisher gezeigt, dass wir kein Programm schreiben können, das für ein Turing-Maschinen-Programm $\langle \mathcal{M} \rangle$ und eine Eingabe w entscheidet, ob $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w hält.
- Wir werden im Folgenden sehen, dass wir aus einem Programm im Allgemeinen keine nicht-trivialen Eigenschaften der von dem Programm realisierten Funktion ableiten können.

Satz von Rice

Satz von Rice.

Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle \mathcal{M} \rangle : \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Satz von Rice

Satz von Rice.

Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle \mathcal{M} \rangle : \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Beweisskizze:

- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon := \{\langle \mathcal{M} \rangle : \mathcal{M} \text{ hält auf der Eingabe } \varepsilon\}$ ist unentscheidbar
- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon^c$ ist unentscheidbar
- Führe den Widerspruchsbeweis für die Unentscheidbarkeit von $L(S)$:
- Konstruiere TM für $\mathcal{H}_\varepsilon^c$ unter Benutzung von TM $\mathcal{M}'$ für $L(S)$

Bemerkungen zum Satz von Rice

Der Satz von Rice hat weitreichende Konsequenzen:

Es ist für Programme nicht entscheidbar, ob die durch sie definierte Sprache endlich, leer, unendlich oder ganz Σ^* ist.

Wir haben hier nur die Unentscheidbarkeit von L_d direkt bewiesen.

Die anderen Beweise folgten dem folgenden Schema:

Um zu zeigen, dass ein Problem A unentscheidbar ist, zeigen wir, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für A ein bekanntermaßen unentscheidbares Problem B entscheiden kann. Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn:
  $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

$$K = \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{l} 1 \\ \hdashline 1\,1\,1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 1\,0\,1\,1\,1 \\ \hdashline 1\,0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 1\,0 \\ \hdashline 0 \end{array}} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn:
  $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

$$K = \underset{(x_1, y_1)}{\begin{array}{|l|}\hline 1 \\ \hdashline 1\,1\,1 \\ \hline\end{array}} \quad \underset{(x_2, y_2)}{\begin{array}{|l|}\hline 1\,0\,1\,1\,1 \\ \hdashline 1\,0 \\ \hline\end{array}} \quad \underset{(x_3, y_3)}{\begin{array}{|l|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 0 \\ \hline\end{array}}$$

$$\underset{2}{\begin{array}{|l|}\hline 1\,0\,1\,1\,1 \\ \hdashline 1\,0 \\ \hline\end{array}}$$

Das Post’sche Korrespondenzproblem

Post’sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

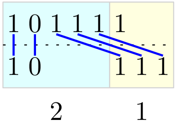
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn:
  $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

$$K = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hdashline 1\,1\,1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1\,1\,1 \\ \hdashline 1\,0 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 0 \\ \hline\end{array} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) \end{array}$$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

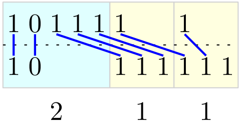
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

$K =$	1	1 0 1 1 1	1 0
	1 1 1	1 0	0
	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

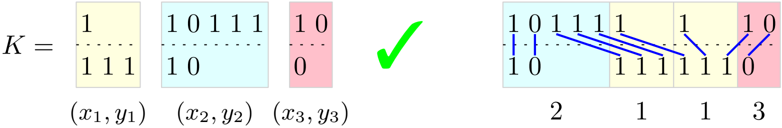
Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn:
  $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$$K = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 0\,1\,1 \\ \hdashline 1\,1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$$K = \begin{array}{ccc} 1\,0 & 0\,1\,1 & 1\,0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 & 1\,1 & 0\,1\,1 \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1\,0 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ 1 \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

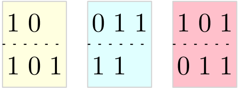
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

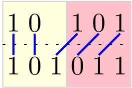
Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$K =$



(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)



1 3

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$$K = \underset{(x_1, y_1)}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array}} \; \underset{(x_2, y_2)}{\begin{array}{|c|}\hline 0\,1\,1 \\ \hdashline 1\,1 \\ \hline\end{array}} \; \underset{(x_3, y_3)}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array}}$$

$$\underset{1}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array}}\underset{3}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array}}\underset{3}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array}}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$$K = \underset{(x_1, y_1)}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array}} \; \underset{(x_2, y_2)}{\begin{array}{|c|}\hline 0\,1\,1 \\ \hline 1\,1 \\ \hline\end{array}} \; \underset{(x_3, y_3)}{\begin{array}{|c|}\hline 1\,0\,1 \\ \hline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array}} \quad ✗$$

$$\underset{2}{\begin{array}{|c|}\hline 0\,1\,1 \\ \hline 1\,1 \\ \hline\end{array}}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{c} 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 1\,0 \\ \hdashline 0\,0\,1 \end{array}} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \end{array} & \begin{array}{c} 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \end{array} & \begin{array}{c} 1\,0 \\ \hdashline 0\,0\,1 \end{array} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \end{array} \\ 3 \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{l} 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 1\,0 \\ \hdashline 0\,0\,1 \end{array}} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{l} 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \end{array}} \\ 1 & 3 \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|}\hline 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1\,0 \\ \hdashline 0\,0\,1 \\ \hline\end{array} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|}\hline 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline\end{array} \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Das Post’sche Korrespondenzproblem

Post’sches Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 0\,0\,1 \\ \hdashline 0 \\ \hline \end{array} \\ (x_1, y_1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 0\,1 \\ \hdashline 0\,1\,1 \\ \hline \end{array} \\ (x_2, y_2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 0\,1 \\ \hdashline 1\,0\,1 \\ \hline \end{array} \\ (x_3, y_3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1\,0 \\ \hdashline 0\,0\,1 \\ \hline \end{array} \\ (x_4, y_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1\,0 & 0\,0\,1 & 0\,0\,1 & 0\,1 \\ \hdashline 0\,0\,1 & 0 & 0 & 1\,0\,1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{3} \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

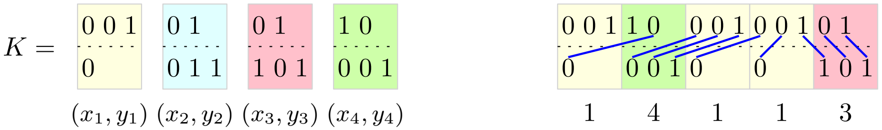
Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblem

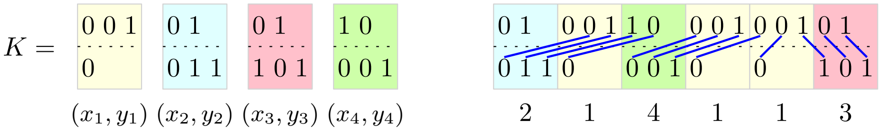
Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$



Das Post’sche Korrespondenzproblem

Post’sches Korrespondenzproblem

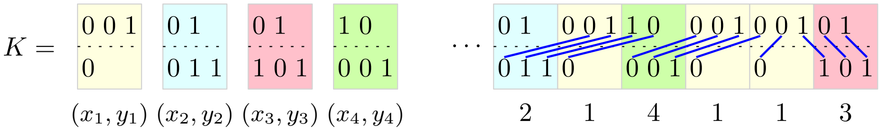
Gegeben ist eine endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$
  $\rightsquigarrow$ Die kürzeste Lösung hat Länge 66.



Unentscheidbarkeit des PKP

Satz.

Das Post’sche Korrespondezproblem ist nicht entscheidbar.

Beweisidee:

Dies kann über die Nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems bewiesen werden.

Eigenschaften von (semi-)entscheidbaren Sprachen

- Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Komplementbildung, Schnitt und Vereinigung.
- Die semi-entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt und Vereinigung, aber nicht unter Komplementbildung.

Satz.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $L^c = \Sigma^* \setminus L$. Dann gilt

- L entscheidbar $\iff$ L^c entscheidbar.
- L entscheidbar $\iff$ L und L^c semi-entscheidbar.

Beweis: Übung und Tutorien.

- **Komplexitätstheorie**

Komplexitätstheorie

Fragestellung bisher:

- Ist eine Sprache L entscheidbar oder nicht?
- Ist eine Funktion berechenbar oder nicht?
- Benutzung von deterministischen Turing-Maschinen.

In diesem Kapitel:

- Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?
- Betrachtung von nichtdeterministischen Turing-Maschinen.

Frage (P vs. NP):

Gibt es einen wesentlichen Effizienzgewinn beim Übergang von der deterministischen Turing-Maschine zur nichtdeterministischen Turing-Maschine?

Wie sieht ein Problem aus?

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel: Traveling Salesman Problem (TSP)

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit ganzzahligen Kantengewichten c, d.h.

- $V := \{1, \ldots, n\}$
- $E := \{\{u, v\} \colon u, v \in V, u \neq v\}$
- $c \colon E \to \mathbb{Z}^+$

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Wie sieht ein Problem aus?

Karlsruher Institut für Technologie

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Bemerkung:

- Mit einer Lösung des Optimierungsproblems kann man leicht auch das Optimalwertproblem und das Entscheidungsproblem lösen.
- Mit einer Lösung des Optimalwertproblems kann man leicht auch das Entscheidungsproblem lösen.

Definition: Problem

Ein Problem Π ist gegeben durch:

- eine allgemeine Beschreibung aller vorkommenden Parameter;
- eine genaue Beschreibung der Eigenschaften, die die Lösung haben soll.

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Kantengewichtung $c\colon E \to \mathbb{Z}^+$, Zahl k

Lösung: zykl. Permutation $x_1 x_2 \cdots x_n$ von V mit $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\sum_{i=1}^{n-1} c(\{x_i, x_{i+1}\}) \leq k$

Eine Instanz I von Π erhalten wir, indem wir die Parameter von Π festlegen. (Problembeispiel)

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}$$

$$c(\{a, b\}) = c(\{b, d\}) = c(\{b, c\}) = 1, c(\{a, c\}) = 2, c(\{c, d\}) = 4$$

Definition: Kodierungsschema

- Wir interessieren uns für die Laufzeit von Algorithmen.
- Diese wird in der Größe des Problems gemessen.

Die Größe eines Problems ist abhängig von der Beschreibung oder Kodierung der Instanzen.

- Ein Kodierungsschema s ordnet jeder Instanz I eines Problems ein Wort oder *Kodierung* $s(I)$ über einem Alphabet Σ zu.

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}$$

$$c(\{a, b\}) = c(\{b, d\}) = c(\{b, c\}) = 1, c(\{a, c\}) = 2, c(\{c, d\}) = 4$$

$$s(I) = 00|01|10|11 \sqcup 00 * 01|00 * 10|10 * 11|01 * 11|01 * 10 \sqcup 1|2|4|1|1$$

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, |, \sqcup, *\}$$

Definition: Kodierungsschema

- Wir interessieren uns für die Laufzeit von Algorithmen.
- Diese wird in der Größe des Problems gemessen.

Die Größe eines Problems ist abhängig von der Beschreibung oder Kodierung der Instanzen.

- Ein Kodierungsschema s ordnet jeder Instanz I eines Problems ein Wort oder *Kodierung* $s(I)$ über einem Alphabet Σ zu.

$$s(I) = 00|01|10|11 \sqcup 00 * 01|00 * 10|10 * 11|01 * 11|01 * 10 \sqcup 1|2|4|1|1$$
$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, |, \sqcup, *\}$$

- Die Inputlänge einer Instanz ist die Anzahl der Symbole ihrer Kodierung.

  hier: $|s(I)| = 51$

Kodierungsschema

Es gibt verschiedene Kodierungsschemata für ein bestimmtes Problem.

Beispiel:

- Zahlen können dezimal, binär, unär, usw. kodiert werden.
- Die Inputlänge von 5127 beträgt dann 4 für dezimal, 13 für binär und 5127 für unär.

Wir werden uns auf vernünftige Schemata festlegen:

- Die Kodierung einer Instanz soll keine überflüssigen Informationen enthalten.
- Zahlen sollen binär (oder k-är für $k \neq 1$) kodiert sein.

Kodierungsschema

Dies bedeutet, die Kodierungslänge

- einer ganzen Zahl n ist $\lfloor \log_k |n| + 1 \rfloor + 1 =: \langle n \rangle$ (eine 1 benötigt man für das Vorzeichen);
- einer rationalen Zahl $r = \frac{p}{q}$ ist $\langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle$;
- eines Vektors $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ist $\langle X \rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$;
- einer Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ist $\langle A \rangle := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\langle a_{ij} \right\rangle$.
- eines Graphen $G = (V, E)$ kann zum Beispiel durch die Kodierung seiner *Adjazenzmatrix*, die eines gewichteten Graphen durch die Kodierung der *Gewichtsmatrix* beschrieben werden.

Äquivalenz von Kodierungsschemata

Zwei Kodierungsschemata s_1, s_2 heißen äquivalent bezüglich eines Problems Π, falls es Polynome p_1, p_2 gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} |s_1(I)| = n \quad &\Longrightarrow \quad |s_2(I)| \le p_2(n) \\ &\text{und} \\ |s_2(I)| = m \quad &\Longrightarrow \quad |s_1(I)| \le p_1(m) \end{aligned}$$

für alle Instanzen I von Π.

Entscheidungsprobleme

- Ein Entscheidungsproblem Π können wir als Familie / Klasse D_Π von Instanzen auffassen.
  - Mit festem Kodierungsschema s ist das eine Menge von Wörtern über Σ $\rightsquigarrow$ unsere Eingaben
- Eine Teilmenge dieser Klasse ist $J_\Pi \subseteq D_\Pi$, die Klasse der **Ja–Instanzen**, d.h. die Instanzen deren Antwort Ja ist.
- Der Rest der Klasse $N_\Pi \subseteq D_\Pi$ ist die Klasse der **Nein–Instanzen**.

Korrespondenz von Entscheidungsproblemen und Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Ein Problem Π und ein Kodierungsschema $s\colon D_\Pi \to \Sigma^*$ zerlegen Σ^* in drei Klassen:

- Wörter aus Σ^*, die *nicht* Kodierung eines Beispiels aus D_Π sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung einer Instanz $I \in N_\Pi$ sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung einer Instanz $I \in J_\Pi$ sind.

Die dritte Klasse ist die Sprache, die zu Π im Kodierungsschema s korrespondiert.

Die zu einem Problem Π und einem Kodierungsschema s **zugehörige Sprache** ist

$$L[\Pi, s] := \left\{ x \in \Sigma^* : \begin{array}{l} \Sigma \text{ ist das Alphabet zu } s \text{ und } x \text{ ist Kodierung} \\ \text{einer Ja–Instanz } I \text{ von } \Pi \text{ unter } s\text{, d.h. } I \in J_\Pi \end{array} \right\}$$

Entscheidungsprobleme und Turing-Maschinen

- Wir betrachten im folgenden deterministische Turing-Maschinen mit zwei Endzuständen q_J, q_N, wobei q_J akzeptierender Endzustand ist.
- Dann wird die Sprache $L_{\mathcal{M}}$ akzeptiert von der Turing-Maschine $\mathcal{M}$, falls
$$L_{\mathcal{M}} = \{x \in \Sigma^* : \mathcal{M} \text{ akzeptiert } x\} .$$
- Eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ **löst** ein Entscheidungsproblem Π unter einem Kodierungsschema s, falls $\mathcal{M}$ bei jeder Eingabe über dem Eingabe-Alphabet in einem Endzustand endet und $L_{\mathcal{M}} = L[\Pi, s]$ ist.
  - D.h. die Turing-Maschine $\mathcal{M}$ entscheidet $L[\Pi, s]$.

Zeitkomplexität

Für eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die für alle Eingaben über dem Eingabe-Alphabet Σ hält, ist die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max \left\{ m : \begin{array}{l} \text{es gibt eine Eingabe } x \in \Sigma^* \text{ mit } |x| = n \text{, so dass die Berechnung} \\ \text{von } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x \ m \text{ Berechnungsschritte (Übergänge) benötigt,} \\ \text{bis ein Endzustand erreicht wird} \end{array} \right\}$$

Zeitkomplexität

Für eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die für alle Eingaben über dem Eingabe-Alphabet Σ hält, ist die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max \left\{ m : \begin{array}{l} \text{es gibt eine Eingabe } x \in \Sigma^* \text{ mit } |x| = n \text{, so dass die Berechnung} \\ \text{von } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x\ m \text{ Berechnungsschritte (Übergänge) benötigt,} \\ \text{bis ein Endzustand erreicht wird} \end{array} \right\}$$

Bemerkungen

- Wenn Eingabe x Länge n hat, so braucht $\mathcal{M}$ höchstens $T_{\mathcal{M}}(n)$ Berechnungsschritte.
- Für ein Entscheidungsproblem Π mit Kodierungsschema s:

Instanz $I \in D_\Pi$ von Π	$\leftrightsquigarrow$	Kodierung $s(I) \in \Sigma^*$
Kodierungslänge $\lvert s(I)\rvert$	$\leftrightsquigarrow$	Länge des Wortes
Zeit zum Lösen von I	$\leftrightsquigarrow$	Anzahl Berechnungsschritte von $\mathcal{M}$

Die Klasse $\mathcal{P}$

Die Klasse $\mathcal{P}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine deterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

- Zum Beispiel $T_{\mathcal{M}}(n) \leq 4n^2 + 42$.
- Sprachen / Entscheidungsprobleme in $\mathcal{P}$ sind “effizient lösbar”.