Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 20.1.2022

Torsten Ueckerdt | 20. Januar 2022

Letzte Vorlesung

- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen
- $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist kontextsensitiv aber nicht kontextfrei
- Nutzlose Variablen effizient finden und eliminieren
- Leere und endliche kontextfreie Sprachen effizient erkennen
- weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Heute:

- Ein Maschinenmodell für kontextfreie Sprachen

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

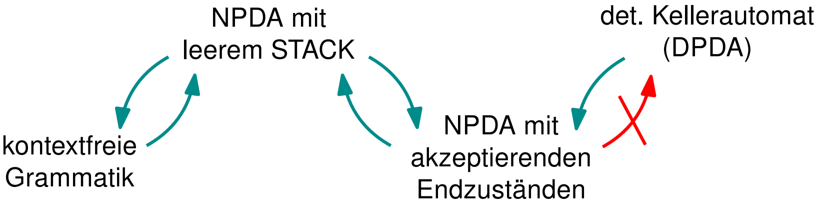
Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	DTM / NTM akzeptiert	
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$	(offen, ob $\mathcal{NTAPE}(n) = \mathcal{DTAPE}(n)$)
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	**???**	
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA	

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	DTM / NTM akzeptiert	
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$	(offen, ob $\mathcal{NTAPE}(n) = \mathcal{DTAPE}(n)$)
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)	
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA	

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	DTM / NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$ (offen, ob $\mathcal{NTAPE}(n) = \mathcal{DTAPE}(n)$)
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA



Kellerautomaten

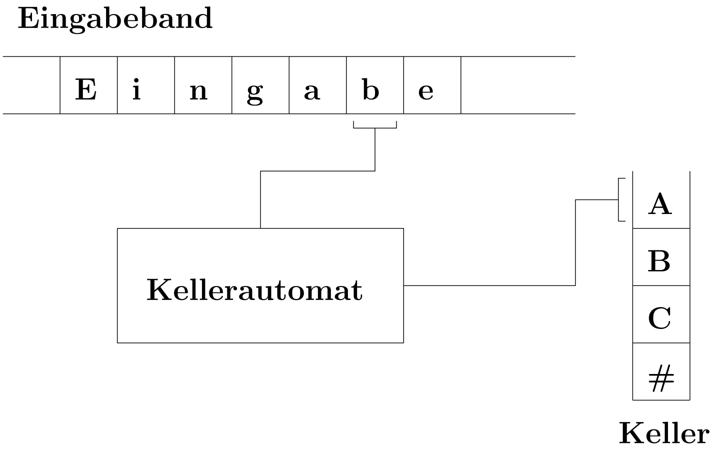
Definition.

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA, Pushdown Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$, wobei

- Q endliche Zustandsmenge
- Σ endliches Eingabealphabet
- Γ endliches STACK-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ Übergangsrelation, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände.

Bemerkung:
$F = \emptyset$ ist möglich.

Kellerautomaten – Visualisierung



Kellerautomaten – Arbeitsweise

Definition.

Eine Konfiguration eines NPDA ist ein Tripel (q, w, α) mit

- $q \in Q$ aktueller Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Definition.

Zu Konfiguration $(q, w_1 \cdots w_k, Z_1 \cdots Z_m)$ gibt es die Nachfolgekonfigurationen:

$$(q', w_2 \cdots w_k, Z_1' \cdots Z_r' Z_2 \cdots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \cdots Z_r') \in \delta(q, w_1, Z_1)$$

und

$$(q', w_1 \cdots w_k, Z_1' \cdots Z_r' Z_2 \cdots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \cdots Z_r') \in \delta(q, \varepsilon, Z_1).$$

Kellerautomaten – Arbeitsweise

Definition.

Ein NPDA akzeptiert ein $w \in \Sigma^*$ durch leeren STACK, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Definition.

Ein NPDA akzeptiert ein $w \in \Sigma^*$ durch einen akzeptierenden Endzustand, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Definition.

Ein NPDA ist deterministisch (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$.

Kellerautomaten – Beispiel

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:

- Betrachte beliebiges Wort $w_1 \cdots w_n \# w_n \cdots w_1 \in L$.

Phase 1

- Lies $w_1 \cdots w_n$ und schreibe jeweils w_i auf den STACK bis $\#$ gelesen.

Phase 2

- Lies $w_n \cdots w_1$ und vergleiche den jeweils gelesenen Buchstaben mit dem jeweils obersten Buchstaben auf dem STACK.
  - Gleichheit: Nimm obersten Buchstaben vom STACK
  - Sonst: Stoppe in nichtakzeptierenden Zustand

Phase 3

- Ist nur noch Z_0 auf dem STACK
  - Entferne Z_0
  - Akzeptiere die Eingabe “mit leerem STACK”

Kellerautomaten – Beispiel

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{0, 1, \#\}$$
$$\Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}$$
$$F = \emptyset$$

$\delta(q_0, 0, Z_0)$	=	$\{(q_1, 0Z_0)\}$	Phase 1
$\delta(q_0, 1, Z_0)$	=	$\{(q_1, 1Z_0)\}$	
$\delta(q_1, 0, 0)$	=	$\{(q_1, 00)\}$	
$\delta(q_1, 0, 1)$	=	$\{(q_1, 01)\}$	
$\delta(q_1, 1, 0)$	=	$\{(q_1, 10)\}$	
$\delta(q_1, 1, 1)$	=	$\{(q_1, 11)\}$	
$\delta(q_1, \#, 0)$	=	$\{(q_2, 0)\}$	Trennzeichen gelesen $\Rightarrow$ Zu Phase 2
$\delta(q_1, \#, 1)$	=	$\{(q_2, 1)\}$	
$\delta(q_2, 0, 0)$	=	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	Phase 2
$\delta(q_2, 1, 1)$	=	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	
$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$	=	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	Phase 3

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\} \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\} \\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\} \\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\} \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\} \\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\} \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\} \\
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\} \\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\} \\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\} \\
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\} \\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\} \\
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(q_0, 0, Z_0) & = & \{(q_1, 0Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & \{(q_1, 1Z_0)\} \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, 00)\} \\
\delta(q_1, 0, 1) & = & \{(q_1, 01)\} \\
\delta(q_1, 1, 0) & = & \{(q_1, 10)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, 11)\} \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) & = & \{(q_2, 0)\} \\
\delta(q_1, \#, 1) & = & \{(q_2, 1)\} \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, 1) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\} \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\} \\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\} \\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\} \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\} \\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\} \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$
q_2		Z_0

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\}\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00)\}\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\}\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\}\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11)\}\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= \{(q_2, 0)\}\\
\delta(q_1, \#, 1) &= \{(q_2, 1)\}\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$
q_2		Z_0

akzeptiert durch leeren STACK

Kellerautomaten – Beispiel 2

Ein NPDA für $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:

- In diesem Fall fehlt das Trennzeichen.
- Der NPDA funktioniert wie der DPDA aus dem letzten Beispiel.
- Der Übergang in Phase 2 funktioniert allerdings nichtdeterministisch.

Bemerkung:

- Für die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ gibt es keinen DPDA.
- NPDAs können also mehr als DPDAs.

Kellerautomaten – Beispiel 2

Ein NPDA für $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$**.**

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_1, 0Z_0)\} && \text{Phase 1}\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q_1, 1Z_0)\} &&\\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= \{(q_1, 00), (q_2, \epsilon)\} &&\\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, 01)\} &&\\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, 10)\} &&\\
\delta(q_1, 1, 1) &= \{(q_1, 11), (q_2, \epsilon)\} &&\\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= \{(q_2, \varepsilon)\} && \text{Phase 2}\\
\delta(q_2, 1, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\} &&\\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\} && \text{Phase 3}
\end{aligned}
$$

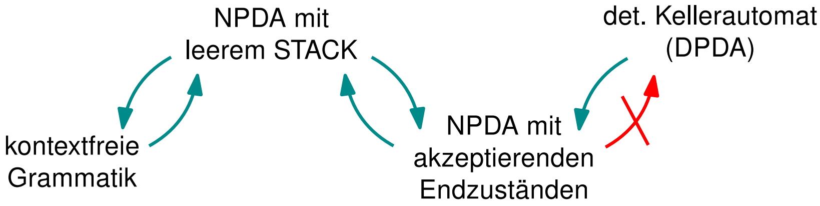
$\mathcal{A} =$
$(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\}\\
\Sigma &= \{0, 1, \#\}\\
\Gamma &= \Sigma \cup \{Z_0\}\\
F &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.

Zu einem NPDA, der eine Sprache L durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert, kann ein NPDA konstruiert werden, der L mit leerem STACK akzeptiert.



Beweis – Beschreibung

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ NPDA, der L durch Übergang in einen Zustand aus F_1 akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen NPDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, der L durch leeren STACK akzeptiert.
- Seien q_0^2, q_E neue Zustände.
- Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.

- Lege zu Beginn Z_0^2 vor Z_0^1 auf den STACK, so dass der STACK nicht “versehentlich” geleert werden kann.
- Dann Verfahre wie in $\mathcal{A}_1$.
- Wenn Zustand in F_1 erreicht wird: Gehe zu q_E und leere den STACK

Beweis – Konstruktion

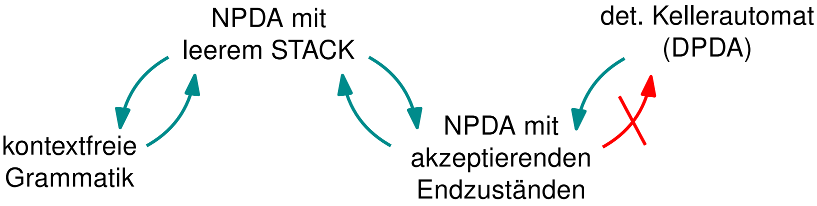
- Gegeben $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$; akzeptiert durch Endzustand
- Wir konstruieren $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$; akzeptiert durch leeren STACK
- Seien q_0^2, q_E neue Zustände. Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

$$\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_E\} \\
\Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\} \\
\delta_2(q_0^2, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_0^1, Z_0^1 Z_0^2)\} \\
\delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z) \text{ für } q \in Q_1,\ a \neq \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
& \qquad\qquad\qquad q \in Q_1 \setminus F_1,\ a = \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
\delta_2(q, \varepsilon, Z) &= \delta_1(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } q \in F_1,\ Z \in \Gamma_2 \\
\delta_2(q_E, \varepsilon, Z) &= \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } Z \in \Gamma_2 \\
\delta(\cdot) &= \emptyset \text{ sonst}
\end{aligned}$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.

Zu einem NPDA, der eine Sprache L mit leerem STACK akzeptiert, kann ein NPDA konstruiert werden, der L durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert.



Beweis – Beschreibung

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1)$, ein NPDA der $w \in L$ mit leerem STACK akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen NPDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2, F_2)$, der genau die $w \in L$ durch Übergang in einen Zustand $q \in F_2$ akzeptiert.
- Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.
- Sei q_F ein neuer (End-)Zustand.
- Sei q_0^2 ein neuer (Anfangs-)Zustand.

Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.

- Lege zu Beginn Z_0^2 vor Z_0^1 auf den STACK, und lösche Z_0^2 nur, wenn die Abarbeitung von $\mathcal{A}_1$ durch leeren STACK akzeptiert hätte.
- Gehe in Endzustand q_F, wenn $\mathcal{A}_1$ durch leeren STACK akzeptiert hätte.

Beweis – Konstruktion

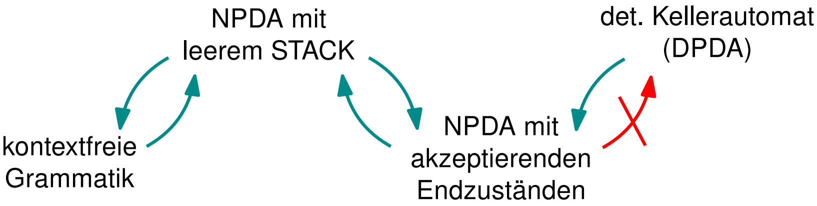
- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ akzeptiert durch leeren STACK.
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, akzeptiert durch Endzustand.
- q_0^2 neuer Anfangszustand.
- q_F neuer (End-)Zustand.
- Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

$$\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_F\}, \\
F_2 &= \{q_F\} \\
\Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\} \\
\delta_2(q_0^2, a, X) &= \begin{cases} \{q_0^1, Z_0^1 Z_0^2\} & \text{falls } a = \varepsilon \text{ und } X = Z_0^2 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\
\delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z), \text{ falls } q \in Q_1, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ und } Z \in \Gamma_1 \\
\delta_2(q, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_F, \varepsilon)\} \text{ für } q \in Q_1.
\end{aligned}$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.

Für eine kontextfreie Grammatik G kann ein NPDA konstruiert werden, der $L(G)$ mit leerem STACK akzeptiert.



Beweis – Konstruktion des NPDA

Karlsruher Institut für Technologie

- Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine kontextfreie Grammatik.
  - Jede Regel in R ist von der Form $A \rightarrow r$ mit $A \in V$ und $r \in (\Sigma \cup V)^*$.
- Für jedes $a \in \Sigma$, ersetze jedes Vorkommen von a in R durch neue Variable Y_a.
  Füge neue Regel $Y_a \rightarrow a$ hinzu.
- $\rightsquigarrow$ Erhalte äquivalente kontextfreie Grammatik $G' = (\Sigma, V', S, R')$.
  - Jede Regel in R' ist von der Form $A \rightarrow r$ mit $A \in V'$ und $r \in \Sigma \cup V'^*$.

Beweis – Konstruktion des NPDA

- Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine kontextfreie Grammatik.
  - Jede Regel in R ist von der Form $A \to r$ mit $A \in V$ und $r \in (\Sigma \cup V)^*$.
- Für jedes $a \in \Sigma$, ersetze jedes Vorkommen von a in R durch neue Variable Y_a. Füge neue Regel $Y_a \to a$ hinzu.
- $\rightsquigarrow$ Erhalte äquivalente kontextfreie Grammatik $G' = (\Sigma, V', S, R')$.
  - Jede Regel in R' ist von der Form $A \to r$ mit $A \in V'$ und $r \in \Sigma \cup V'^*$.

Konstruiere gewünschten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V' \quad Z_0 := S$$

$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \varepsilon) \mid (A \to a) \in R', a \in \Sigma\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) := \{(q_0, r) \mid (A \to r) \in R', r \in V'^*\}$$

Beweis – Konstruktion des NPDA

- Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine kontextfreie Grammatik.
  - Jede Regel in R ist von der Form $A \to r$ mit $A \in V$ und $r \in (\Sigma \cup V)^*$.
- Für jedes $a \in \Sigma$, ersetze jedes Vorkommen von a in R durch neue Variable Y_a. Füge neue Regel $Y_a \to a$ hinzu.
- $\rightsquigarrow$ Erhalte äquivalente kontextfreie Grammatik $G' = (\Sigma, V', S, R')$.
  - Jede Regel in R' ist von der Form $A \to r$ mit $A \in V'$ und $r \in \Sigma \cup V'^*$.

Konstruiere gewünschten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V' \quad Z_0 := S$$

$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \varepsilon) \mid (A \to a) \in R', a \in \Sigma\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) := \{(q_0, r) \mid (A \to r) \in R', r \in V'^*\}$$

Wir werden beweisen:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \cdots w_n$ in $L(G') \Leftrightarrow \mathcal{A}$ erkennt $w_1 \cdots w_n$ mit leerem STACK

Beweis – Der Plan

Konstruktion:

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0\} \quad \Gamma := V' \quad Z_0 := S\\
\delta(q_0, a, A) &:= \{(q_0, \varepsilon) \mid (A \to a) \in R', a \in \Sigma\}\\
\delta(q_0, \varepsilon, A) &:= \{(q_0, r) \mid (A \to r) \in R', r \in V'^*\}
\end{aligned}
$$

Wir werden beweisen:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \cdots w_n$ in $L(G') \Leftrightarrow \mathcal{A}$ erkennt $w_1 \cdots w_n$ mit leerem STACK

Beweis – Der Plan

Konstruktion:
$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V' \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \varepsilon) \mid (A \to a) \in R', a \in \Sigma\}$$
$$\delta(q_0, \varepsilon, A) := \{(q_0, r) \mid (A \to r) \in R', r \in V'^*\}$$

Wir werden beweisen:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \cdots w_n$ in $L(G') \Leftrightarrow \mathcal{A}$ erkennt $w_1 \cdots w_n$ mit leerem STACK

Wir beweisen mittels Induktion die stärkere Aussage für jedes t:

$S \xrightarrow{t} w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m$ mittels Linksableitung $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kann beim Lesen von $w_1 \cdots w_i$ in t Schritten den STACK-Inhalt $A_1 \cdots A_m$ erzeugen.

Induktionsanfang: $t = 0$

- $S \xrightarrow{0} S \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}$ initialisiert STACK $Z_0 = S$

Beweis – Korrektheit

Induktionsschritt: $t \geq 1$

$S \overset{t}{\longrightarrow} w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m$

- Betrachte als $S \overset{t-1}{\longrightarrow} w_1 \cdots w_{i'} B_1 \cdots B_{m'}$ und einen weiteren Schritt $B_1 \rightarrow r$.
- Nach Induktionsvoraussetzung gilt

  $S \overset{t-1}{\longrightarrow} w_1 \cdots w_{i'} B_1 \cdots B_{m'} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ kann beim Lesen von $w_1 \cdots w_{i'}$ in $t-1$ Schritten den STACK-Inhalt $B_1 \cdots B_{m'}$ erzeugen

1. Fall: $r = a$ mit $a \in \Sigma$

- D.h. $i' = i - 1$, $w_i = a$ und $A_1 \cdots A_m = B_2 \cdots B_{m'}$.
- Der t-te Schritt von $\mathcal{A}$ ist $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, a, B_1)$.

2. Fall: $r \in V'^*$

- D.h. $i' = i$ und $A_1 \cdots A_m = r\, B_2 \cdots B_{m'}$.
- Der t-te Schritt von $\mathcal{A}$ ist $(q_0, r) \in \delta(q_0, \varepsilon, B_1)$.

$\Rightarrow \mathcal{A}$ kann in t Schritten STACK-Inhalt $A_1 \cdots A_m$ erzeugen.

Beweis – Korrektheit

Induktionsschritt: $t \geq 1$

$S \xrightarrow{t} w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m$

- Betrachte als $S \xrightarrow{t-1} w_1 \cdots w_{i'} B_1 \cdots B_{m'}$ und einen weiteren Schritt $B_1 \to r$.
- Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$S \xrightarrow{t-1} w_1 \cdots w_{i'} B_1 \cdots B_{m'} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ kann beim Lesen von } w_1 \cdots w_{i'} \text{ in } t-1 \text{ Schritten den STACK-Inhalt } B_1 \cdots B_{m'} \text{ erzeugen}$$

1. Fall: $r = a$ mit $a \in \Sigma$

- D.h. $i' = i - 1$, $w_i = a$ und $A_1 \cdots A_m = B_2 \cdots B_{m'}$.
- Der t-te Schritt von $\mathcal{A}$ ist $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, a, B_1)$.

2. Fall: $r \in V'^*$

- D.h. $i' = i$ und $A_1 \cdots A_m = r\, B_2 \cdots B_{m'}$.
- Der t-te Schritt von $\mathcal{A}$ ist $(q_0, r) \in \delta(q_0, \varepsilon, B_1)$.

$\Leftrightarrow \mathcal{A}$ kann in t Schritten STACK-Inhalt $A_1 \cdots A_m$ erzeugen.

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz.

Jede durch einen NPDA durch leeren STACK akzeptierte Sprache ist kontextfrei.