



# Theoretische Grundlagen der Informatik

**Vorlesung am 11.11.2021**

Torsten Ueckerdt | 11. November 2021

# Letzte Vorlesung

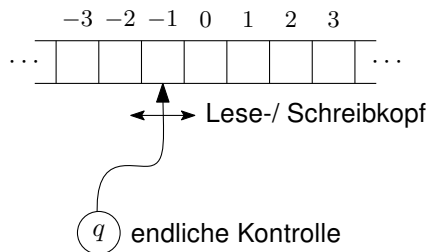
## (deterministische) Turing-Maschine

- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$

# Letzte Vorlesung

## (deterministische) Turing-Maschine

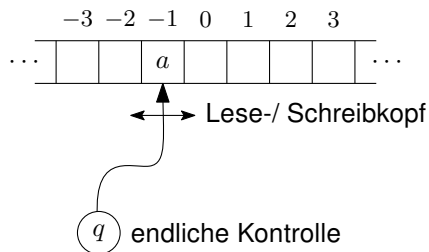
- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$
- Der Übergang  $\delta(q, a) = (p, b, L)$  wird graphisch dargestellt als  $\textcircled{q} \xrightarrow{a|b, L} \textcircled{p}$



# Letzte Vorlesung

## (deterministische) Turing-Maschine

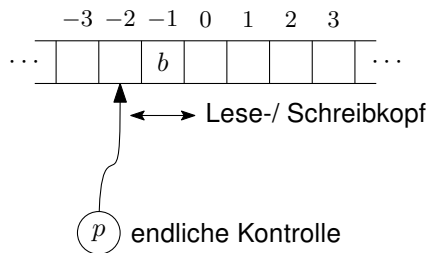
- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$
- Der Übergang  $\delta(q, a) = (p, b, L)$  wird graphisch dargestellt als
 
$$\textcircled{q} \xrightarrow{a|b, L} \textcircled{p}$$



# Letzte Vorlesung

## (deterministische) Turing-Maschine

- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$
- Der Übergang  $\delta(q, a) = (p, b, L)$  wird graphisch dargestellt als
 
$$\textcircled{q} \xrightarrow{a|b, L} \textcircled{p}$$

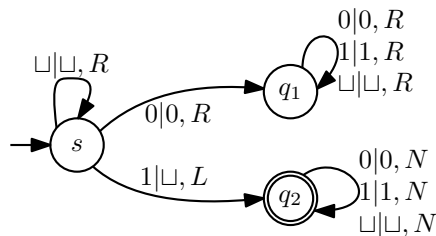


## Konventionen bei der TM

- Die Turing-Maschine startet im Zustand  $s$ .
- Der Lese-/Schreibkopf startet an der linkensten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht.
- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie
  - zum ersten Mal in einen Endzustand kommt, oder
  - in einem Zustand  $q$  ein Symbol  $a$  liest und  $\delta(q, a) = (q, a, N)$  ist.
- Das bedeutet, dass Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, überflüssig sind.

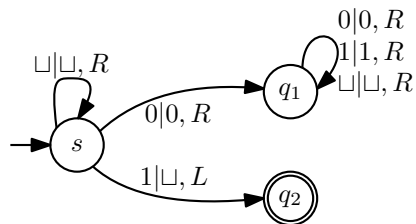
## Beispiel-Turing-Maschine

- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie
  - zum ersten Mal in einen Endzustand kommt, oder
  - in einem Zustand  $q$  ein Symbol  $a$  liest und  $\delta(q, a) = (q, a, N)$  ist.



# Beispiel-Turing-Maschine

Frage: Was erkennt / berechnet diese TM ?

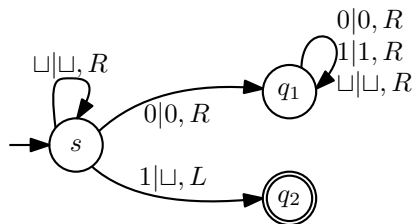




# Beispiel-Turing-Maschine

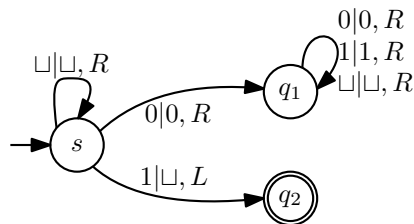
Frage: Was erkennt / berechnet diese TM ?

- Die TM erkennt alle Wörter aus  $\{0, 1\}^*$ , die mit einer Eins beginnen.
- Die TM löscht die führende Eins, falls vorhanden.
- Alles andere auf dem Band bleibt unverändert.
- Der Lese-/Schreibkopf steht nach dem Stop links neben der Stelle an der die führende Eins gelesen wurde.



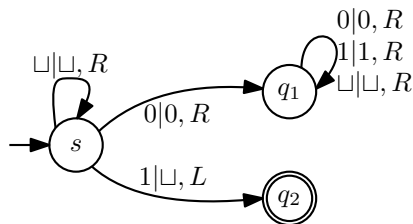
## Beispiel-Turing-Maschine

- Es gibt Eingaben, für die eine Turing-Maschine unter Umständen niemals stoppt.
- **Welche Eingaben sind dies in diesem Beispiel?**



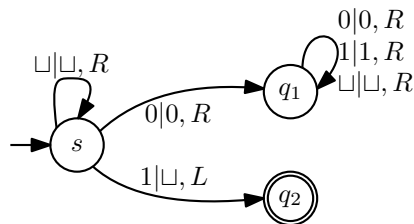
## Beispiel-Turing-Maschine

- Es gibt Eingaben, für die eine Turing-Maschine unter Umständen niemals stoppt.
- **Welche Eingaben sind dies in diesem Beispiel?**
- Die TM stoppt nicht, falls die Eingabe nicht mit Eins beginnt.



## Beispiel-Turing-Maschine

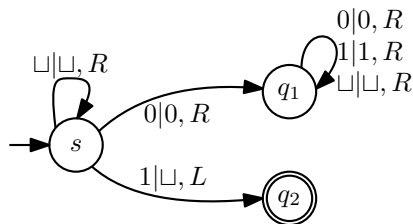
- Eine Turing-Maschine erkennt nicht nur eine Sprache,
- sondern sie verändert auch die Eingabe, und
- hat insofern auch eine Ausgabe  
(= Inhalt des Bandes nach der akzeptierenden Bearbeitung).
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion  $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ .



## Beispiel-Turing-Maschine

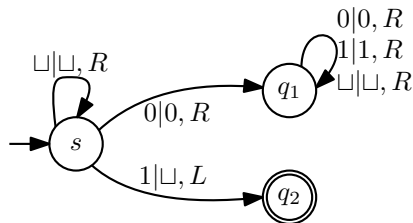
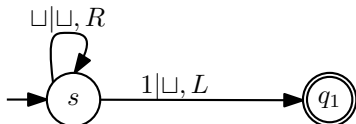
- Eine Turing-Maschine erkennt nicht nur eine Sprache,
- sondern sie verändert auch die Eingabe, und
- hat insofern auch eine Ausgabe  
(= Inhalt des Bandes nach der akzeptierenden Bearbeitung).
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion  $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ .
- Im Beispiel ist

$$f(w) = \begin{cases} v & \text{falls } w = 1v \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$



## Bemerkungen zur TM

- Oft werden wir die Turing-Maschine beziehungsweise deren Übergangsfunktion nur unvollständig beschreiben.
- Beispiel:



- Eine Vervollständigung ist immer möglich.
- Wenn für eine bestimmte Kombination  $q, a$  kein Übergang  $\delta(q, a)$  definiert ist, dann stoppt die Turing-Maschine im Zustand  $q$ .  
(z.B. setze  $\delta(q, a) := (q, a, N)$ )

# Turing-Maschine Übersicht

## (deterministische) Turing-Maschine

- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$

# Turing-Maschine Übersicht

## (deterministische) Turing-Maschine

- Bestandteile:
  - Lese-/Schreibkopf \_\_\_\_\_ liest/schreibt Zeichen auf Band
  - endliche Kontrolle \_\_\_\_\_ stets in einem Zustand
  - unendliches Rechenband \_\_\_\_\_ enthält Eingabe
- formal:  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma \supseteq (\Sigma \cup \{\sqcup\}), s \in Q, \delta, F \subseteq Q)$
- Übergangsfunktion:  $\delta(q, a) = (q', a', X \in \{L, N, R\})$

Bei der Bearbeitung einer Eingabe  $w$  gibt es **drei Möglichkeiten**:

$\mathcal{M}$  "läuft" in einen  
Zustand in  $F$ .

$\rightsquigarrow \mathcal{M}$  akzeptiert  $w$

$\mathcal{M}$  "läuft" in einen  
Übergang

$\delta(q, a) = (q, a, N)$ .

$\rightsquigarrow \mathcal{M}$  lehnt  $w$  ab

$\mathcal{M}$  "läuft"  
unendlich lange.

$\rightsquigarrow \mathcal{M}$  stoppt nicht



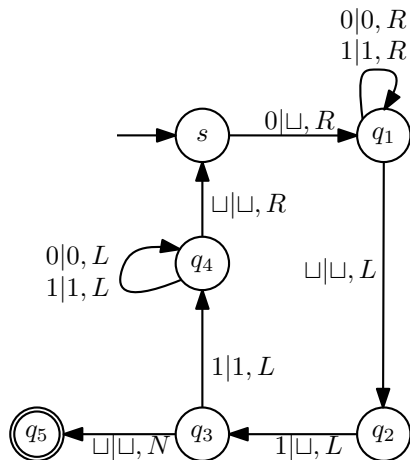
## Definitionen zur TM

- Eine Turing-Maschine **akzeptiert** eine Eingabe  $w \in \Sigma^*$ , wenn sie nach Lesen von  $w$  in einem Zustand aus  $F$  stoppt.
- Sie **akzeptiert** eine Sprache  $L$  genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter  $w \in L$  als Eingabe akzeptiert.
- Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, **die auf allen Eingaben stoppt** und eine Eingabe  $w$  genau dann akzeptiert, wenn  $w \in L$  gilt.
- Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben  $w$  akzeptiert für die  $w \in L$ .  
Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben  $w \notin L$  ist damit nicht genau definiert. D.h., die Turing-Maschine stoppt entweder nicht in einem Endzustand oder aber stoppt gar nicht.

## Notation: Konfiguration

- Situation in der sich eine TM  $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$  befindet, wird durch die Angabe der **Konfiguration** kodiert.
- Eine Konfiguration hat die Form  $w(q)av$ , wobei
  - $w, v \in \Gamma^*$
  - $a \in \Gamma$
  - $q \in Q$
- Bedeutung:
  - $\mathcal{M}$  befindet sich gerade im Zustand  $q$ .
  - Der Lese-/Schreibkopf steht auf dem Zeichen  $a$ .
  - Links vom Lese-/Schreibkopf steht das Wort  $w$  auf dem Rechenband.
  - Rechts vom Lese-/Schreibkopf steht das Wort  $v$  auf dem Rechenband.

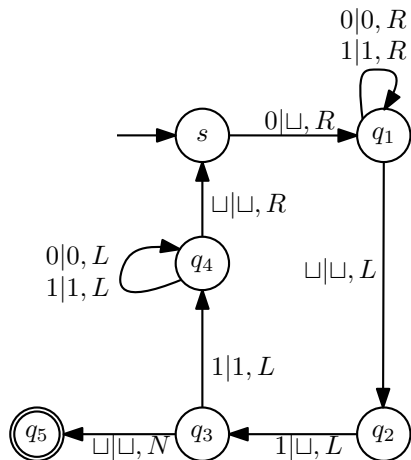
## Beispiel: Konfiguration



TM akzeptiert  $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$ .

Beispiel: Eingabe  $w = 0011$

# Beispiel: Konfiguration



(s)0011  
 $\sqcup(q_1)011$   
 $0(q_1)11$   
 $01(q_1)1$   
 $011(q_1)\sqcup$   
 $01(q_2)1$   
 $0(q_3)1\sqcup$   
 $(q_4)01$   
 $(q_4)\sqcup 01$   
 $\sqcup(s)01$   
 $\sqcup(q_1)1$   
 $1(q_1)\sqcup$   
 $(q_2)1$   
 $(q_3)\sqcup$   
 $(q_5)\sqcup$

TM akzeptiert  $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$ .

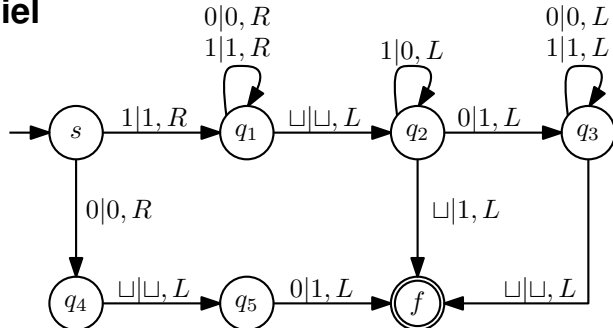
Beispiel: Eingabe  $w = 0011$

## Definition: berechenbar / totalrekursiv

- Eine Funktion  $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  heißt **(Turing-)berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe von  $w \in \Sigma^*$  genau dann akzeptiert wenn  $f(w)$  nicht undefiniert ist und in diesem Fall den Funktionswert  $f(w) \in \Gamma^*$  ausgibt.
- Eine Turing-Maschine **realisiert** eine Funktion  $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ , falls gilt:

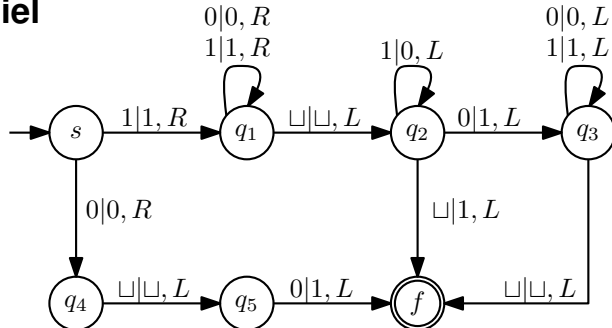
$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der Turing-Maschine,} \\ \quad \text{wenn sie bei Eingabe } w \text{ akzeptiert.} \\ \text{undefiniert,} \\ \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

## Beispiel



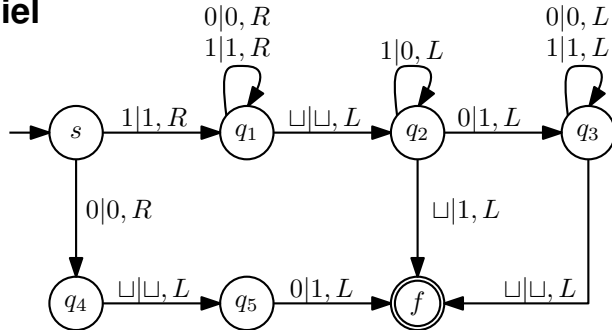
- Fasse die Eingabe  $w$  als binäre Zahl auf.
- Es sollen nur Eingaben ohne führende Nullen und die Null selbst akzeptiert werden.
- Addiere zur Eingabe  $w \in (0 \cup 1)^*$  eine Eins.

## Beispiel



$$\text{Es gilt: } f(w) = \begin{cases} w + 1 & \text{falls } w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*, \\ & w \text{ interpretiert als Binärzahl} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

## Beispiel

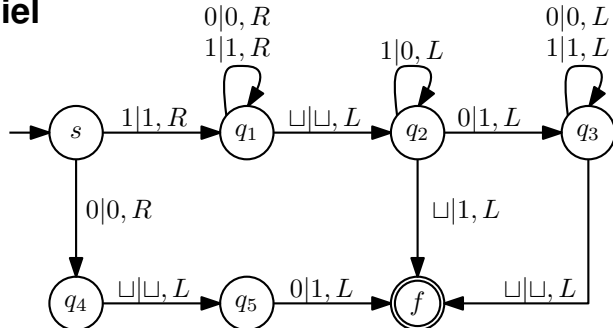


Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- $q_1$  Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach rechts bis zum Eingabeende,
- $q_2$  Bildung des Übertrages, der durch die Addition von Eins zu einer bereits vorhandenen Eins entsteht,



## Beispiel



Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- $q_3$  Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, nachdem die Aufsummierung abgeschlossen ist (kein Übertrag mehr),
- $q_4, q_5$  Sonderbehandlung für den Fall der Eingabe 0, und
- $f$  Endzustand.

# Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Eine Turing-Maschine akzeptiert eine Sprache  $L$ , wenn sie genau auf den Eingaben  $w \in L$  in einem ausgezeichneten Endzustand stoppt.
- $L$  ist entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und  $L$  akzeptiert.
- Die Funktion  $f$  heißt berechenbar, wenn eine Turing-Maschine existiert, die  $f$  realisiert.

# Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Man kann eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$ , die auf allen Eingaben stoppt, so modifizieren, dass es zwei ausgezeichnete Zustände  $q_J$  und  $q_N$  gibt und dass die modifizierte Turing-Maschine  $\tilde{\mathcal{M}}$  stets in einem der Zustände  $q_J$  oder  $q_N$  hält und akzeptiert.
- Dabei stoppt  $\tilde{\mathcal{M}}$  bei der Eingabe  $w$  genau dann in  $q_J$ , wenn  $\mathcal{M}$  das Wort  $w$  akzeptiert, ansonsten stoppt  $\tilde{\mathcal{M}}$  in  $q_N$ .
- Damit ist die Sprache  $L$  genau dann entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die immer in einem der Zustände  $\{q_J, q_N\}$  stoppt, wobei sie gerade für  $w \in L$  in  $q_J$  hält.

# Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Man kann eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$ , die auf allen Eingaben stoppt, so modifizieren, dass es zwei ausgezeichnete Zustände  $q_J$  und  $q_N$  gibt und dass die modifizierte Turing-Maschine  $\tilde{\mathcal{M}}$  stets in einem der Zustände  $q_J$  oder  $q_N$  hält und akzeptiert.
- Dabei stoppt  $\tilde{\mathcal{M}}$  bei der Eingabe  $w$  genau dann in  $q_J$ , wenn  $\mathcal{M}$  das Wort  $w$  akzeptiert, ansonsten stoppt  $\tilde{\mathcal{M}}$  in  $q_N$ .

**Testen Sie sich:** Finden Sie diese Modifikation  $\tilde{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{M}$ ?

- Damit ist die Sprache  $L$  genau dann entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die immer in einem der Zustände  $\{q_J, q_N\}$  stoppt, wobei sie gerade für  $w \in L$  in  $q_J$  hält.

## Korollar

- Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist **entscheidbar** genau dann, wenn ihre **charakteristische Funktion**  $\chi_L$  berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Eine Sprache  $L$  ist **semi-entscheidbar** genau dann, wenn die partielle Funktion  $\chi_L^*$  berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

# Die Church'sche These

## Church'sche These.

Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

# Die Church'sche These

## Church'sche These.

Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

### Interpretation

- Turing-Maschinen sind formale Modelle für Algorithmen.
- Kein Berechnungsverfahren kann algorithmisch genannt werden, wenn es nicht von einer Turing-Maschine ausführbar ist.

### Bemerkung

- Die Church'sche These ist ohne eine präzise Definition von **intuitiv berechenbar** nicht beweisbar.
- Sie ist aber in der Informatik allgemein akzeptiert.

# Die Church'sche These

## Church'sche These.

Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

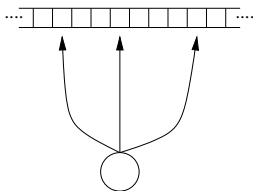
### Begründung

- Es existieren keine Beispiele von Funktionen, die als intuitiv berechenbar angesehen werden, aber nicht Turing-berechenbar sind.
- Alle Versuche, realistische Modelle aufzustellen, die mächtiger sind als Turing-Maschinen, schlugen fehl.
- Eine Reihe von völlig andersartigen Ansätzen, den Begriff der Berechenbarkeit formal zu fassen, wie zum Beispiel die Registermaschine, haben sich als äquivalent erwiesen.



# Erweiterungen der Turing-Maschine

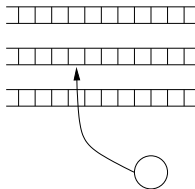
## Mehrere Lese-/Schreibköpfe



- Mehrere Lese-/Schreibköpfe ( $n \in \mathbb{N}$ ) greifen auf das eine Eingabeband zu und werden von der endlichen Kontrolle gesteuert.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ  $\delta: Q \times \Gamma^n \rightarrow Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n$ .
- Die Zustände  $q \in Q$  kann man als  $n$ -Tupel auffassen.
- Es ist nötig eine Prioritätenregel für die einzelnen Köpfe anzugeben, falls mehrere auf einem Feld des Eingabebandes stehen.

# Erweiterungen der Turing-Maschine

## Mehrere Bänder



- Ein Lese-/Schreibkopf kann auf mehrere Eingabebänder ( $n \in \mathbb{N}$ ) zugreifen.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta: Q \times \Gamma \times \{1, \dots, n\} \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{1, \dots, n\}.$$

# Erweiterungen der Turing-Maschine

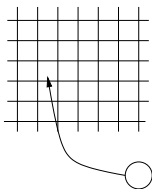
## Mehrere Lese-/Schreibköpfe für mehrere Bänder

- Wir haben jetzt  $m$  Bänder und  $n$  Lese-/Schreibköpfe.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta: Q \times \Gamma^n \times \{1, \dots, m\}^n \rightarrow Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n \times \{1, \dots, m\}^n.$$

# Erweiterungen der Turing-Maschine

## Mehrdimensionale Bänder



- Das Eingabeband ist nun mehrdimensional und hat hier im Beispiel die Dimension zwei.
- Wir sprechen dann von einem Arbeitsfeld.
- Dabei ist

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L(eftrightarrow), U(p), R(ight), D(own), N(othing)\}$$

# Erweiterungen der Turing-Maschine

## Bemerkungen

- Fragestellungen der Art:
  - Wann stoppt eine Mehrkopf-Maschine?
  - Welcher Kopf ‚gewinnt‘, wenn mehrere Köpfe (verschiedene) Symbole an dieselbe Stelle schreiben wollen?müssen bei solchen Modifikationen noch geklärt werden.
- Es hat sich allerdings gezeigt, dass keine dieser Erweiterungen mehr leistet, als eine normale Turing-Maschine.
- **Alle angegebenen Modifikationen können durch eine normale 1–Band Turing-Maschine simuliert werden.**

# Die universelle Turing-Maschine

## Ziel

- Bisher: Nur Turing-Maschinen, die eine bestimmte Aufgabe erfüllen.
- Jetzt: Konstruktion einer Turing-Maschine, die als Eingabe
  - ein Programm und
  - eine spezielle Eingabeerhält.
- Die Aufgabe besteht darin, das gegebene Programm auf der gegebenen speziellen Eingabe auszuführen.

# Die universelle Turing-Maschine

Wir betrachten dazu eine normierte Turing-Maschine, d.h.

- $Q := \{q_1, \dots, q_n\}$
- $\Sigma := \{a_1, \dots, a_k\}$
- $\Gamma := \{\sqcup, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_l\}$
- $s := q_1$
- $F := \{q_2\}$
  
- Dies bedeutet keine Einschränkung in der Mächtigkeit der Turing-Maschinen:
  - Jede beliebige Turing-Maschine kann durch eine derart normierte Turing-Maschine der obigen Form simuliert werden.
  - Jede normierte Turing-Maschine  $\mathcal{M}$  lässt sich eindeutig als Wort aus  $(0 \cup 1)^*$  kodieren.

## Die Gödelnummer

Sei  $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, \delta, s, F)$  eine Turing-Maschine.

Die **Gödelnummer** von  $\mathcal{M}$ , bezeichnet als  $\langle \mathcal{M} \rangle$ , ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

- Kodiere Übergang

$$\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \text{ durch } 0^i 1 0^j 1 0^r 1 0^s 1 0^t,$$

wobei  $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$  und

- $d_1$  für  $L$ ,
  - $d_2$  für  $R$  und
  - $d_3$  für  $N$  steht.
- Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:

$$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \dots 11\text{code}_z 111,$$

wobei  $\text{code}_i$  für  $i = 1, \dots, z$  alle Funktionswerte von  $\delta$  in beliebiger Reihenfolge beschreibt.



## Die Gödelnummer - Bemerkungen

- Die eigentlichen Werte der Turing-Maschine werden also (unär) durch Nullen beschrieben und die Einsen dienen als Begrenzung der Eingabewerte.
- Jede Turing-Maschine kann also durch ein Wort aus  $(0 \cup 1)^*$  kodiert werden.
- Umgekehrt beschreibt jedes Wort aus  $(0 \cup 1)^*$  (höchstens) eine Turing-Maschine.
- Wir vereinbaren, dass ein Wort, das keine Turing-Maschine in diesem Sinne beschreibt, (zum Beispiel  $\varepsilon$ , 0, 000) eine Turing-Maschine kodiert, die  $\emptyset$  akzeptiert.
- Eine **universelle Turing-Maschine** erhält als Eingabe ein Paar  $(\langle \mathcal{M} \rangle, w)$ , wobei  $w \in \{0, 1\}^*$  ist, und sie simuliert  $\mathcal{M}$  auf  $w$ .
- Wir verwenden ein **Trennzeichen**  $\# \notin \{0, 1\}$ . Die Eingabe für die universelle Turing-Maschine hat die Form  $\langle \mathcal{M} \rangle \# w$ .

## Die Gödelnummer - Beispiel

Sei  $\mathcal{M} = (Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{0, 1\}, \sqcup, \Gamma = \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ , mit

$$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R)$$

$$\delta(q_3, 0) = (q_1, 1, R)$$

$$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R)$$

$$\delta(q_3, \sqcup) = (q_3, 1, L)$$

$\mathcal{M}$  zusammen mit der Eingabe 1011 ist dann:

11101001000101001100010101001001100010010010100110001000100010010111#1011

## Die Gödelnummer - Beispiel

Sei  $\mathcal{M} = (Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{0, 1\}, \sqcup, \Gamma = \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ , mit

$$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R)$$

$$\delta(q_3, 0) = (q_1, 1, R)$$

$$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R)$$

$$\delta(q_3, \sqcup) = (q_3, 1, L)$$

$\mathcal{M}$  zusammen mit der Eingabe **1011** ist dann:

11101001000101001100010101001001100010010010100110001000100010010111#1011

## Definition

Zu  $w \in \{0, 1\}^*$  sei  $T_w$

- die Turing-Maschine mit der Gödelnummer  $w$ , bzw.
- die Turing-Maschine, die  $\emptyset$  akzeptiert.

Es sei  $L(T_w)$  die Sprache, die von  $T_w$  akzeptiert wird.

# Die Diagonalsprache

Wir konstruieren die sogenannte **Diagonalsprache**  $L_d$ , wie folgt:

- Betrachte die Wörter aus  $\{0, 1\}^*$  in **kanonischer** Reihenfolge, d.h.  $w_i$  steht vor  $w_j$  ( $i < j$ ), falls
  - $|w_i| < |w_j|$ , oder
  - $|w_i| = |w_j|$  und  $w_i$  lexikographisch vor  $w_j$  steht.
- $\mathcal{M}_j$  sei die TM, die durch die Gödelnummer  $w_j$  kodiert ist.
- Wir konstruieren eine unendliche Tabelle,
  - an deren Position  $(i, j)$  für  $1 \leq i, j < \infty$  eine Null oder eine Eins steht, und
  - welche beinhaltet, ob  $w_i$  in  $L(\mathcal{M}_j)$  ist.
- Damit gilt für die Einträge

$$(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \text{ } w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Die Diagonalsprache

- Damit gilt für die Einträge

$$(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \text{ } w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Definiere dazu

$$L_d := \{w_i : \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}.$$

- $L_d$  enthält also alle  $w_i$ , für die auf der Diagonalen an der Stelle  $(i, i)$  eine Null steht.
- Dies führt später zu einem Diagonalbeweis (Cantor).

# Die Diagonalsprache - Veranschaulichung

- $(i, j) = 1$  falls  $\mathcal{M}_j$   $w_i$  akzeptiert, 0 sonst
- $L_d := \{w_i : \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$
- $L_d$  enthält also alle  $w_i$ , für die auf der Diagonalen an der Stelle  $(i, i)$  eine Null steht.

$w \in \{0, 1\}^*$	Gödelnummer								
	$w_{123}$	$w_{124}$	$w_{125}$						
⋮	⋮								
$w_{123}$	1	0	1	0	1	0	0	$w_{123} \in L_d$	$w_{123} = 1111011 \in L_d$
$w_{124}$	0	0	1	0	0	1	1	$w_{124} \notin L_d$	$w_{124} = 1111100 \notin L_d$
$w_{125}$	1	0	0	1	1	0	1	$w_{125} \notin L_d$	$w_{125} = 1111101 \notin L_d$
⋮	⋮								

# Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz.

Die Sprache  $L_d$  ist nicht entscheidbar.



# Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

## Satz.

Die Sprache  $L_d$  ist nicht entscheidbar.

### Beweis:

Wäre  $L_d$  entscheidbar, so existierte eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$ , die

- (1) bei jeder Eingabe hält,
- (2) genau die  $w \in L_d$  akzeptiert.

Dann ist  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$  für (mindestens) ein  $i$ .

Wende nun  $\mathcal{M}_i$  auf  $w_i$  an:

- Falls  $w_i \in L_d$ , dann akzeptiert  $\mathcal{M}$  das Wort  $w_i$  wegen (2).
- Falls  $w_i \in L_d$ , dann akzeptiert  $\mathcal{M}_i$  das Wort  $w_i$  nicht,

(laut der Definition von  $L_d$ )

Zusammen ist dies ein Widerspruch zu  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$ .

# Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

## Satz.

Die Sprache  $L_d$  ist nicht entscheidbar.

### Beweis:

Wäre  $L_d$  entscheidbar, so existierte eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$ , die

- (1) bei jeder Eingabe hält,
- (2) genau die  $w \in L_d$  akzeptiert.

Dann ist  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$  für (mindestens) ein  $i$ .

Wende nun  $\mathcal{M}_i$  auf  $w_i$  an:

- Falls  $w_i \notin L_d$ , dann akzeptiert  $\mathcal{M}$  das Wort  $w_i$  nicht wegen (2).
- Falls  $w_i \in L_d$ , dann akzeptiert  $\mathcal{M}_i$  das Wort  $w_i$ ,

(laut der Definition von  $L_d$ )

Zusammen ist dies ein Widerspruch zu  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$ .

# Korollar

## Korollar

Die Sprache  $L_d^c := \{0, 1\}^* \setminus L_d$  ist nicht entscheidbar.

# Korollar

## Korollar

Die Sprache  $L_d^c := \{0, 1\}^* \setminus L_d$  ist nicht entscheidbar.

### Beweis:

- Wäre  $L_d^c$  entscheidbar, so existierte eine Turing-Maschine, die  $L_d^c$  entscheidet.
- Diese könnte aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die  $L_d$  entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

# Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.

**Wer rasiert den Barbier?**

# Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.

## Wer rasiert den Barbier?

Daniel Düsentrieb behauptet, eine allwissende Maschine erfunden zu haben. Man stellt eine Ja/Nein-Frage und die Antwort leuchtet auf. Dagobert Duck kauft die Maschine. Will aber nur bei korrekter Antwort zahlen. Er stellt der Maschine die Frage: Wirst du mit **Nein** antworten?

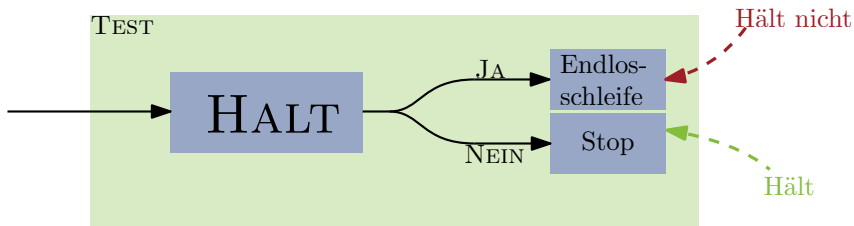
## Was passiert?

# Halteproblem

Programm HALT:



Programm TEST:

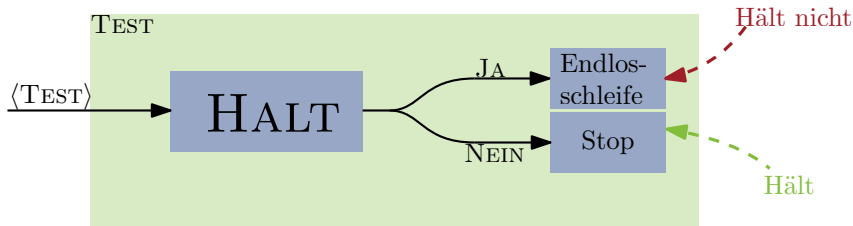


# Halteproblem

Programm HALT:



Programm TEST:



Wie verhält sich TEST bei der Eingabe  $\langle \text{TEST} \rangle$ ?



# Das Halteproblem

## Definition.

Das **Halteproblem** ist definiert als folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{w\#v : T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}.$$

## Satz.

$\mathcal{H}$  ist nicht entscheidbar.

## Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe  $w$  stoppt, ist nicht entscheidbar.