



Theoretische Grundlagen der Informatik

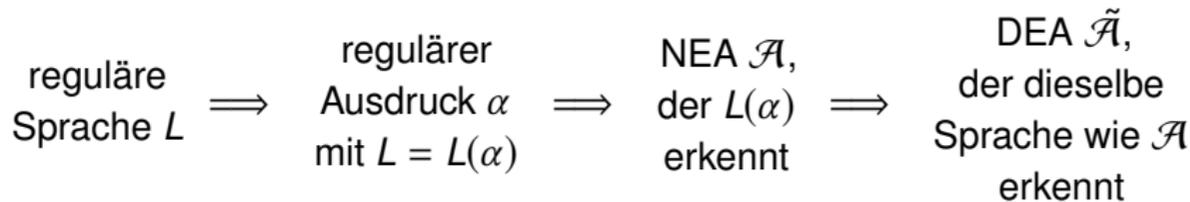
Vorlesung am 27.10.2021

Torsten Ueckerdt | 27. Oktober 2021

Letzte Vorlesung

Satz.

Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.



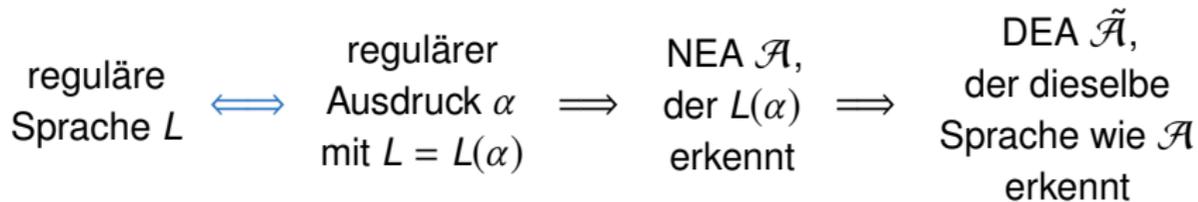
Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz.

Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.



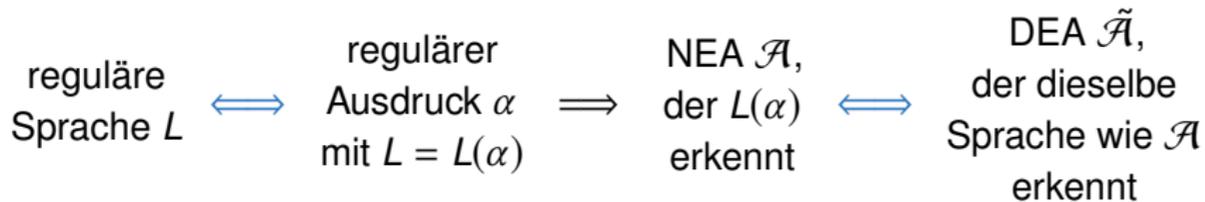
Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz.

Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.



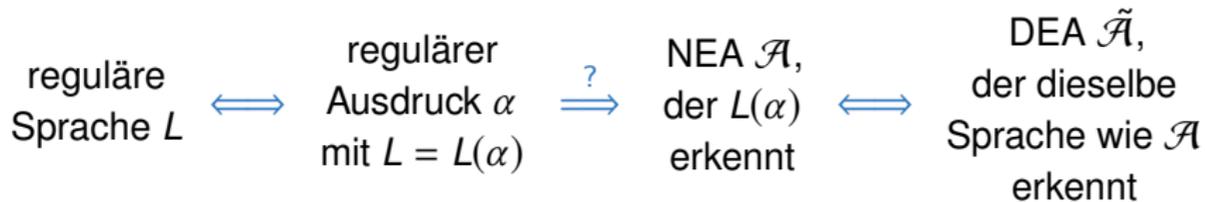
Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz.

Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.



Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

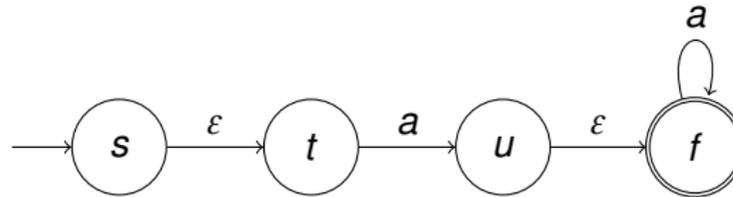
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$				$\{f\}$

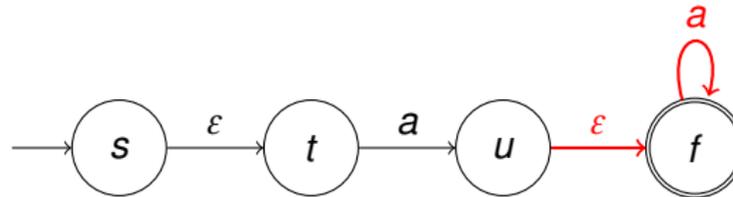
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$			$\{f\}$	$\{f\}$

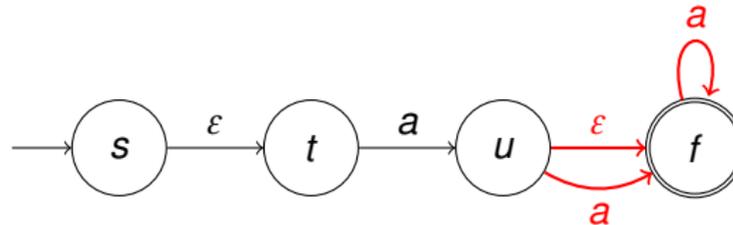
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat.**

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$			$\{f\}$	$\{f\}$

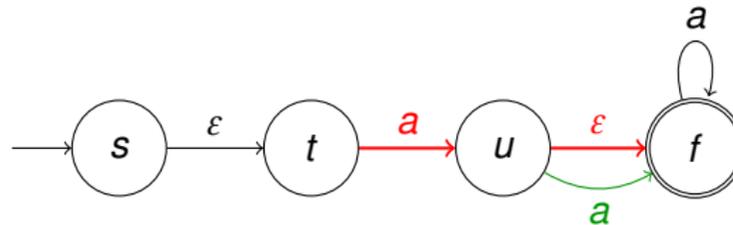
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat.**

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$		$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

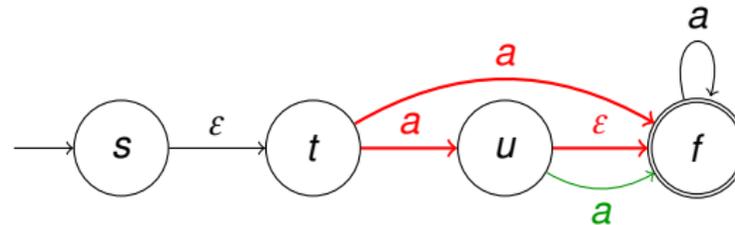
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$		$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

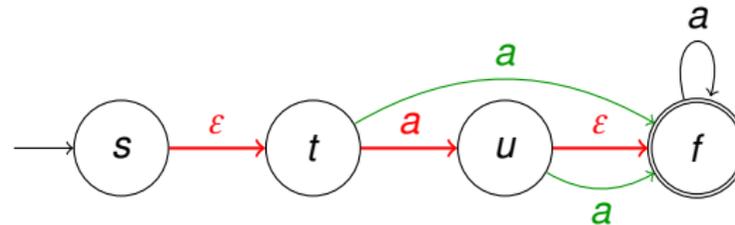
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

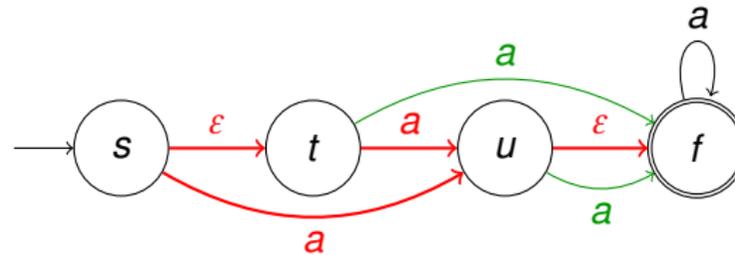
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

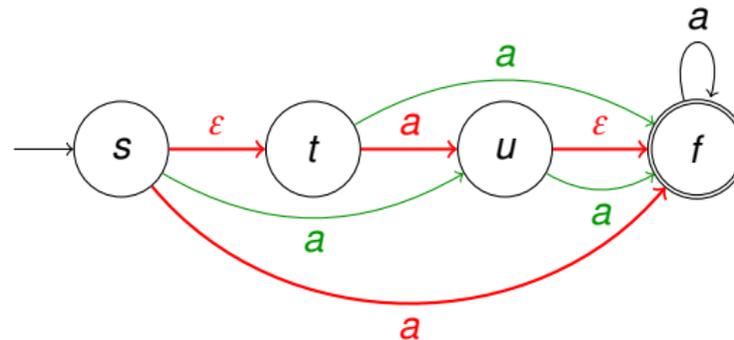
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

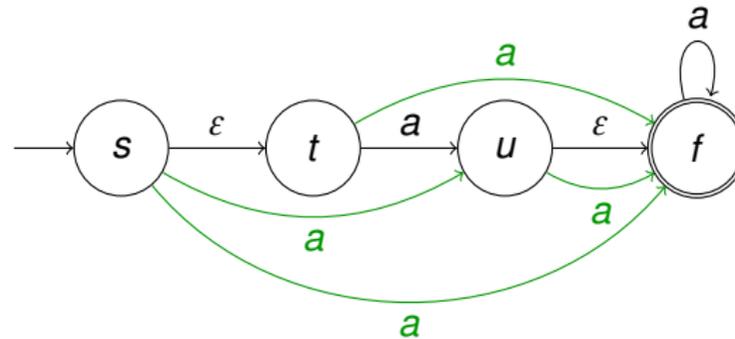
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

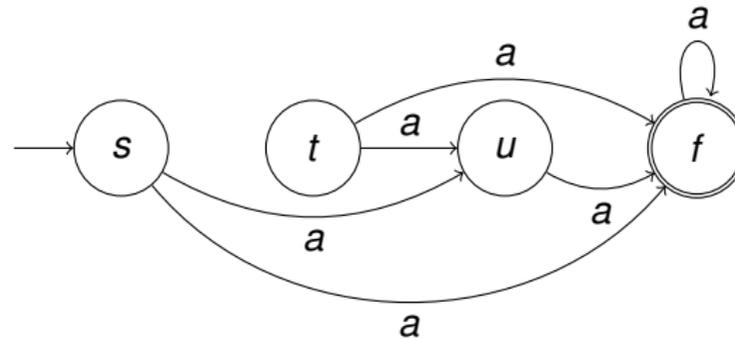
Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat.**

Erinnerung an
Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p
von q erreichbar ist mit
beliebig vielen
 ε -Übergängen und
genau einem
 a -Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε -Übergängen

Satz.

Zu jedem NEA \mathcal{A} mit ε -Übergängen gibt es einen NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert **und nicht mehr Zustände hat**.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NEA mit ε -Übergängen.

Konstruiere NEA $\tilde{\mathcal{A}} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε -Übergänge wie folgt:

- $\tilde{Q} := Q, \tilde{s} := s, \tilde{F} := F$ (bzw. $\tilde{F} := F \cup \{\tilde{s}\}$, falls $E(s) \cap F \neq \emptyset$)

■

$$\tilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\} & \text{falls } a = \varepsilon \\ \tilde{\delta}(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$$

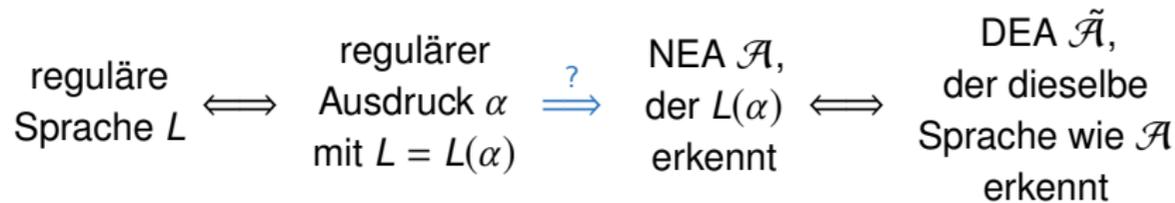
Ein Übergang in $\tilde{\mathcal{A}}$ entspricht einer Folge von Übergängen in \mathcal{A} von denen genau einer kein ε -Übergang ist, und umgekehrt.

$\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{A}}$ und \mathcal{A} erkennen dieselbe Sprache, d.h. sie sind äquivalent.

Letzte Vorlesung

Satz.

Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.



Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

EA \Rightarrow Regularität

Satz.

Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten erkannt wird, ist regulär.

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$L = \{w \in \Sigma^* : \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$

- Die Abarbeitung eines Wortes $w = a_1, \dots, a_k$ bewirkt das Durchlaufen einer Folge von Zuständen s, q_1, \dots, q_k , wobei nicht notwendigerweise $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$ gilt.
- Wir suchen die Wörter, so dass der letzte Zustand in F ist.
- Betrachte für jeden Zustand $f \in F$ getrennt die Wörter, deren Abarbeitung in f endet.

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$$L = \{w \in \Sigma^* : \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$$

Zu $f \in F$ definiere:

$$\begin{aligned} L_f &:= \{w \in \Sigma^* : \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in } f\} \\ &= \{w \in \Sigma^* : w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\} \end{aligned}$$

- Damit ist $L = \bigcup_{f \in F} L_f$.
- Wenn wir zeigen können, dass für alle $f \in F$ die Sprache L_f regulär ist, so ist auch L regulär.

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

$$L_f := \{w \in \Sigma^* : w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\}$$

Ab jetzt sei $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$.

Wir definieren zu

$$q_r, q_t \in Q: L_{q_r, q_t} := \{w \in \Sigma^* : w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t\} .$$

Insbesondere gilt also: $L_f = L_{s, f}$. Unterteile L_{q_r, q_t} :

$$L_{q_r, i, q_t} := \{w \in \Sigma^* : \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur} \\ \text{Zwischenzustände in } \{q_1, \dots, q_i\}\}$$

(also w bewirkt: $q_r \rightarrow \underbrace{\dots\dots\dots}_{\in \{q_1, \dots, q_i\}} \rightarrow q_t$.)

Damit gilt $L_{q_r, q_t} = L_{q_r, n, q_t}$.

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

$L_{q_r, i, q_t} := \{w \in \Sigma^* : \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur}$
 Zwischenzustände in $\{q_1, \dots, q_i\}\}$

Wir zeigen, dass L_{q_r, i, q_t} für $q_r, q_t \in Q$ und $0 \leq i \leq n$ regulär sind:

- Zunächst betrachten wir direkte Überführungen, also $i = 0$:

$L_{q_r, 0, q_t} := \{w \in \Sigma^* : \text{Abarbeitung von } w \text{ führt von } q_r \text{ nach } q_t$
 ohne Zwischenzustand}

Falls $r = t$ und somit $q_r = q_t$ ist, ist

$$L_{q_r, 0, q_t} = \{a \in \Sigma : \delta(q_t, a) = q_t\} \cup \{\varepsilon\} .$$

Andernfalls betrachten wir alle w mit $q_r \xrightarrow{w} q_t$, ohne
 Zwischenzustände, also

$$L_{q_r, 0, q_t} = \{a \in \Sigma : \delta(q_r, a) = q_t\} .$$

Diese Sprachen sind jeweils regulär.

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

- Betrachte nun $i = 1$:

$$L_{q_r, 1, q_t} := \{w \in \Sigma^* : w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t \text{ entweder direkt oder unter Benutzung nur von } q_1\}$$

Es gilt dann:

$$L_{q_r, 1, q_t} = L_{q_r, 0, q_t} \cup (L_{q_r, 0, q_1} \cdot (L_{q_1, 0, q_1})^* \cdot L_{q_1, 0, q_t})$$

Also ist $L_{q_r, 1, q_t}$ auch wieder regulär, weil $L_{\cdot, 0, \cdot}$ regulär ist.

- Wir wollen per Induktion nach i zeigen, dass L_{q_r, i, q_t} für alle $q_r, q_t \in Q$ und alle $0 \leq i \leq n$ regulär ist.
- Für den Induktionsschritt $i \geq 1$ gilt allgemein:

$$L_{q_r, i, q_t} = L_{q_r, i-1, q_t} \cup (L_{q_r, i-1, q_i} \cdot (L_{q_i, i-1, q_i})^* \cdot L_{q_i, i-1, q_t})$$

Beweis: EA \Rightarrow Regularität

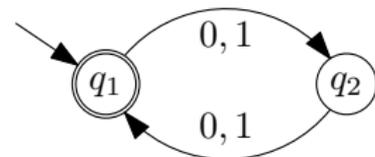
$$L_{q_r, i, q_t} = L_{q_r, i-1, q_t} \cup (L_{q_r, i-1, q_i} \cdot (L_{q_i, i-1, q_i})^* \cdot L_{q_i, i-1, q_t})$$

- Es wurden für L_{q_r, i, q_t} nur die Sprachen $L_{\cdot, i-1, \cdot}$ und $\cup, \cdot, *$ verwendet.
- Per Induktion nach i können wir annehmen, dass alle Sprachen der Form $L_{\cdot, i-1, \cdot}$ regulär sind.
- Damit ist gezeigt, dass auch L_{q_r, i, q_t} regulär ist für alle Zustandspaare aus $q_r, q_t \in Q$.
- Damit ist gezeigt, dass insbesondere $L_f = L_{s, n, f}$ regulär ist für jedes $f \in F$.
- Damit ist auch $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{f \in F} L_f$ regulär.

Beispiel

Gesucht: $L = L(\mathcal{A})$. Es gilt $L = L_{q_1, 2, q_1}$.

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{0, 1\}, \delta, s, F)$ mit
 $Q := \{q_1, q_2\}$, $s = q_1$, $F = \{q_1\}$



Beispiel

Gesucht: $L = L(\mathcal{A})$. Es gilt $L = L_{q_1,2,q_1}$. Dann ist

$$L_{q_1,0,q_1} = L_{q_2,0,q_2} = \varepsilon$$

$$L_{q_1,0,q_2} = L_{q_2,0,q_1} = (0 \cup 1)$$

$$L_{q_1,1,q_1} = L_{q_1,0,q_1} \cup L_{q_1,0,q_1} (L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_1} = \varepsilon$$

$$L_{q_1,1,q_2} = L_{q_1,0,q_2} \cup L_{q_1,0,q_1} (L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_2}$$

$$= (0 \cup 1) \cup \varepsilon \varepsilon^* (0 \cup 1) = 0 \cup 1$$

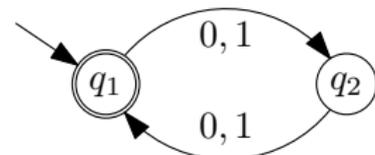
$$L_{q_2,1,q_1} = (0 \cup 1) \cup (0 \cup 1) \varepsilon^* \varepsilon = 0 \cup 1$$

$$L_{q_2,1,q_2} = \varepsilon \cup (0 \cup 1) \varepsilon^* (0 \cup 1) = \varepsilon \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)$$

$$L = L_{q_1,2,q_1} = L_{q_1,1,q_1} \cup (L_{q_1,1,q_2} (L_{q_2,1,q_2})^* L_{q_2,1,q_1})$$

$$= \varepsilon \cup (0 \cup 1) ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* (0 \cup 1) = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$$

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{0, 1\}, \delta, s, F)$ mit
 $Q := \{q_1, q_2\}$, $s = q_1$, $F = \{q_1\}$



Satz von Kleene

- Wir haben gezeigt, dass die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.
- Dies wird auch als der **Satz von Kleene** bezeichnet.

Satz von Kleene.

Die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

reguläre Sprache L \iff regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ \iff NEA \mathcal{A} , der $L(\alpha)$ erkennt \iff DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie \mathcal{A} erkennt



Stephen Cole Kleene
(1909-1994)

Satz von Kleene

- Wir haben gezeigt, dass die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.
- Dies wird auch als der **Satz von Kleene** bezeichnet.

Satz von Kleene.

Die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

reguläre Sprache L \iff regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ \iff NEA \mathcal{A} , der $L(\alpha)$ erkennt \iff DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie \mathcal{A} erkennt

- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?



Stephen Cole Kleene
(1909-1994)

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Beispiel:

Die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{ (,) \}$.

Etwa $(())(())(()) \in L$ $()()() \notin L$

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Beispiel:

Die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{ (,) \}$.

Etwa $(())(())(()) \in L$ $()()() \notin L$

- Die Klammerung ist genau dann korrekt, wenn w gleich viele öffnende wie schließende Klammern enthält, und wenn man w von links nach rechts liest, so gibt es nie mehr „)“ als „(“ bis dahin.
- **Intuition:** *Ein Automat, der L erkennen kann, muss in der Lage sein, sich für ein beliebiges Wort $w \in L$ die Anzahl von „(“ gegenüber „)“ zu merken.*
Dies kann aber beliebig groß werden, und der Automat müsste über unendliche viele Zustände verfügen.
- Die Sprache der Klammerausdrücke ist also zwar simpel, aber wohl nicht regulär.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz.

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n, v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz.

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n, v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Für alle	$\forall L \subseteq \Sigma^*$ mit L regulär
existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $ w > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx, uv \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0:$
gilt	$uv^i x \in L$

Pumping-Lemma (Beweis I)

Satz.

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n, v \neq \varepsilon,$$

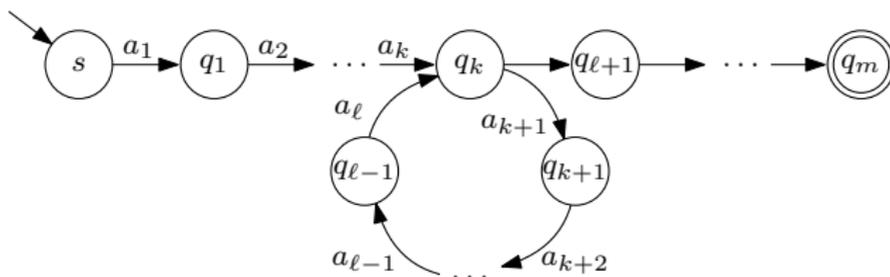
existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

- Sei L eine reguläre Sprache.
- Dann existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.
- Sei Q dessen Zustandsmenge und $n := |Q|$.
- Sei $w \in L$ beliebig mit $|w| > n$, etwa $w = a_1 \dots a_n \dots a_m$ mit $m > n$.

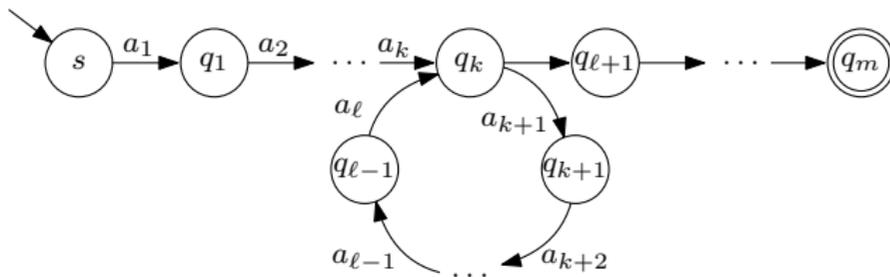
Pumping-Lemma (Beweis II)

- Bei der Abarbeitung von w werden dann Zustände q_0, \dots, q_m durchlaufen mit $q_0 = s$ und $q_m \in F$.
- Da $m > n$, gibt es k, ℓ mit $k \neq \ell$ und $q_k = q_\ell$.
- OBdA. sei $k < \ell$ und seien k, ℓ kleinstmöglich. Also $0 \leq k < \ell \leq n$.



- Dann kann der Zykel $q_k, q_{k+1}, \dots, q_\ell = q_k$ auch gar nicht oder beliebig oft bei der Abarbeitung eines Wortes aus L durchlaufen werden und es wird stets der Zustand $q_m \in F$ erreicht.

Pumping-Lemma (Beweis II)



- Dann kann der Zykel $q_k, q_{k+1}, \dots, q_{l-1} = q_k$ auch gar nicht oder beliebig oft bei der Abarbeitung eines Wortes aus L durchlaufen werden und es wird stets der Zustand $q_m \in F$ erreicht.
- Also gibt es eine Zerlegung $w = \underbrace{(a_1 \dots a_k)}_u \cdot \underbrace{(a_{k+1} \dots a_{l-1})}_v \cdot \underbrace{(a_{l+1} \dots a_m)}_x$
mit $|uv| = \ell \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so dass auch $uv^i x \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Verwendung des Pumping-Lemmas

- Das Pumping-Lemma liefert eine **notwendige** Bedingung für die Regularität von Sprachen.
- Durch **Widerlegen** der Aussage des Pumping-Lemmas kann man zeigen, dass eine Sprache **nicht regulär** ist.
- Das Pumping-Lemma liefert **keine** hinreichende Bedingung für die Regularität von Sprachen.
- Durch **Nachweisen** der Aussage des Pumping-Lemmas kann man **nichts** zeigen.

Merke:

Jede reguläre Sprache erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas.

Eine Sprache, die die Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt, ist auch nicht regulär.

Verwendung des Pumping-Lemmas

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L :

existiert $\exists n \in \mathbb{N}$
für alle $\forall w \in L$ mit $|w| > n$
existiert $\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$
für alle $\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt $uv^i x \in L$

Verwendung des Pumping-Lemmas

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L :

existiert $\exists n \in \mathbb{N}$
 für alle $\forall w \in L$ mit $|w| > n$
 existiert $\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$
 für alle $\forall i \in \mathbb{N}_0$:
 gilt $uv^i x \in L$

Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas für Sprache L :

für alle $\forall n \in \mathbb{N}$
 existiert $\exists w \in L$ mit $|w| > n$
 für alle $\forall u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$
 existiert $\exists i \in \mathbb{N}_0$:
 gilt $uv^i x \notin L$

Beispiel (1) zum PL

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L :

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $ w > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $ uv \leq n$, $v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \in L$

Beispiel (1)

■ $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{w \in \Sigma^* : w \text{ enthält } 10 \text{ nicht als Teilwort}\} = 0^*1^*$

“ \exists ” Wähle $n = 1$.

“ \forall ” Betrachte beliebiges $w \in L$, $|w| > n$.

“ \exists ” Wähle Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$, $|v| = 1$.

“ \forall ” Für beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ hat $uv^i x$ nicht 10 als Teilwort; $uv^i x \in L$.

$\rightsquigarrow L$ erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas.

Beispiel (2) zum PL

Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas für Sprache L :

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$
existiert	$\exists w \in L$ mit $ w > n$
für alle	$\forall u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $ uv \leq n$, $v \neq \varepsilon$
existiert	$\exists i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \notin L$

Beispiel (2)

■ $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{0^k 1^k : k \geq 0\} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

“ \forall ” Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

“ \exists ” Wähle $w = 0^n 1^n$. Beachte: $|w| = 2n > n$ und $w \in L$.

“ \forall ” Betrachte beliebige Zerlegung $w = uvx$, $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$.

“ \exists ” Wähle $i = 0$. Da $v = 0^a$ für ein $a \geq 1$, ist $uv^0 x = 0^{n-a} 1^n \notin L$.

$\rightsquigarrow L$ erfüllt nicht Aussage des Pumping-Lemmas. $\rightsquigarrow L$ ist nicht regulär.

Beispiel (3) zum PL

$\exists n \forall w \in L, |w| > n \exists uvx = w, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon \forall i \in \mathbb{N}_0: uv^i x \in L$

Beispiel (3)

- $\Sigma = \{0, 1\}, L = \left\{ w \in \Sigma^* : w = 1^k \ (k > 0) \text{ oder } w = 0^j 1^{k^2} \ (j \geq 1, k \geq 0) \right\}$.

“ \exists ” Wähle $n = 1$.

“ \forall ” Betrachte beliebiges $w \in L, |w| > n$.

“ \exists ” Wähle Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon, |v| = 1$.

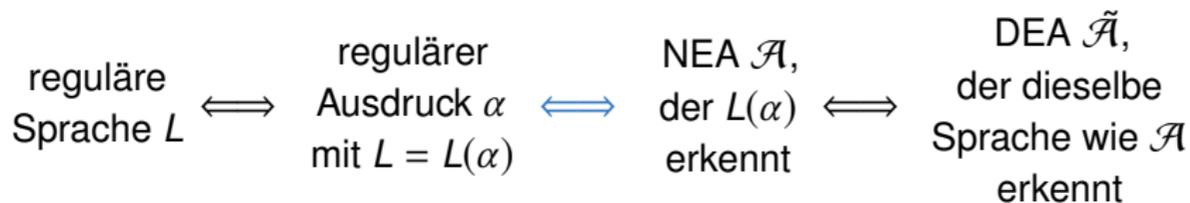
“ \forall ” Betrachte beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$.

- Falls $w = 1^k$, so ist $uv^i x = 1^{k+i-1}$, also vom Typ $1^\ell \in L$.
- Falls $w = 0^j 1^{k^2}$ und $i = 0$,
so ist $uv^0 x = 1^{k^2} \in L$ oder $uv^0 x = 0^{j-1} 1^{k^2} \in L$.
- Falls $w = 0^j 1^{k^2}$ und $i \geq 1$, so ist $uv^i x = 0^{j+i} 1^{k^2} \in L$.

$\rightsquigarrow L$ erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas. (Aber L ist nicht regulär!)

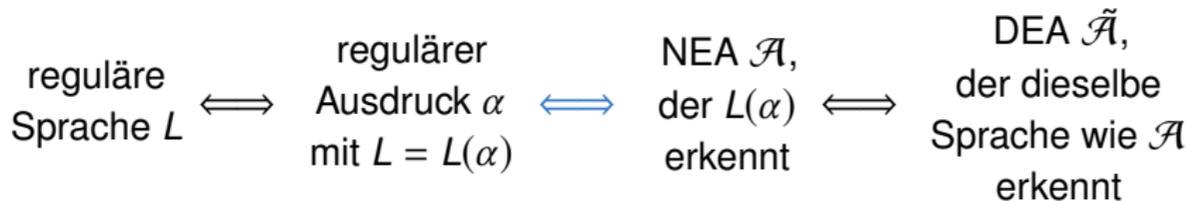
Zusammenfassung

- beliebiger NEA \mathcal{A} \longrightarrow NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge
- beliebiger DEA \mathcal{A} \longrightarrow regulärer Ausdruck für $L(\mathcal{A})$



Zusammenfassung

- beliebiger NEA \mathcal{A} \longrightarrow NEA $\tilde{\mathcal{A}}$ ohne ε -Übergänge
- beliebiger DEA \mathcal{A} \longrightarrow regulärer Ausdruck für $L(\mathcal{A})$



Aussage des Pumping-Lemmas:

$$\exists n \forall w \in L, |w| > n \exists uvx = w, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L \quad (\star)$$

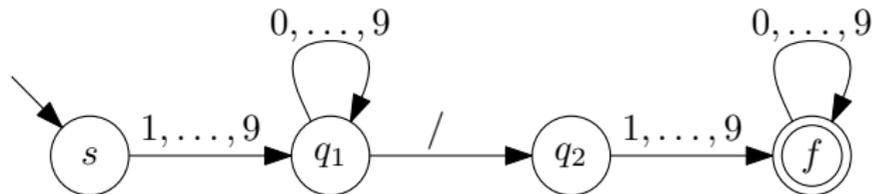
- Pumping-Lemma: L regulär $\implies L$ erfüllt (\star)
- **Widerlegen** der Aussage des Pumping-Lemmas beweist Nicht-Regularität einer Sprache:
 L erfüllt (\star) nicht $\implies L$ ist nicht regulär $\iff L$ nicht von EA erkannt

Testen Sie sich!

Testen Sie sich:

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{/ \}$.

Sei $L = L(\mathcal{A})$ mit folgendem Automaten \mathcal{A} :



↪ Finden Sie einen regulären Ausdruck für L ?

↪ Gilt die Aussage des Pumping-Lemmas für L ? (Für welche n ?)

Sei $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{=\}$.

Sei $L' = \{w \in \Sigma^* \mid w = uvu \text{ mit } u \in \{1, \dots, 9\}^*, v = =\}$.

↪ Gilt die Aussage des Pumping-Lemmas für L' ?