



# Theoretische Grundlagen der Informatik

**Vorlesung am 20.10.2021**

Torsten Ueckerdt | 20. Oktober 2021

# Heute

## Organisatorisches

- Team, Termine
- Vorlesungsaufzeichnungen
- Homepage, Literaturempfehlungen
- Übungsblätter, Klausur
- ILIAS und Forum

## Wiederholung aus GBI

- Wörter, formale Sprachen
- Reguläre Sprachen, reguläre Ausdrücke
- Endliche Automaten
- Kontextfreie Grammatiken

## Übung:

Laura merker  
[laura.merker2@kit.edu](mailto:laura.merker2@kit.edu)

Jonas Sauer  
[jonas.sauer2@kit.edu](mailto:jonas.sauer2@kit.edu)

## Vorlesung:

Torsten Ueckerdt

# Termine (Änderungen vorbehalten)

## Mittwochs

## Donnerstags

20.10. Vorlesung  
 27.10. Vorlesung  
 03.11. Vorlesung  
 10.11. Übung  
 17.11. Vorlesung  
 24.11. Vorlesung  
 01.12. Vorlesung  
 08.12. Übung  
 15.12. Vorlesung  
 22.12. Vorlesung

21.10. Vorlesung  
 28.10. Übung  
 04.11. Vorlesung  
 11.11. Vorlesung  
 18.11. Übung  
 25.11. Übung  
 02.12. Vorlesung  
 09.12. Vorlesung  
 16.12. Übung  
 23.12. Übung

## Mittwochs

## Donnerstags

12.01. Vorlesung  
 19.01. Vorlesung  
 26.01. —  
 02.02. Vorlesung  
 09.02. Übung

13.01. Vorlesung  
 20.01. Übung  
 27.01. —  
 03.02. Vorlesung  
 10.02. Vorlesung

# Homepage und ILIAS

Homepage → <https://i11www.iti.kit.edu/teaching/winter2021/tgi/index>

- Aktuelle Informationen / Termine
- Alte Klausuren
- Übungsblätter und Musterlösungen
- Skripte und Literaturempfehlungen

ILIAS-Forum →

[https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs\\_1628298&client\\_id=produktiv](https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1628298&client_id=produktiv)

- Für Fragen
- Für Austausch untereinander
- Vorlesungsaufzeichnungen, Folien
- Übungsblätter

# Literaturempfehlungen

- Ingo Wegener: **Theoretische Informatik**  
B.G. Teubner Verlag Stuttgart, 1993
- Uwe Schöning: **Theoretische Informatik - kurzgefasst**  
Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, 1997
- R. Garey und D. S. Johnson:  
**Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**  
W. H. Freeman, New York, 1979
- A. Asteroth, C. Baier:  
**Theoretische Informatik: eine Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und formale Sprachen mit 101 Beispielen**  
Pearson Studium, 2002
- J. Hromkovič: **Theoretical Computer Science**  
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011

# Übungsblätter

## In der Regel:

- Ausgabe etwa alle zwei Wochen
- In derselben Übung: Besprechung von ähnlichen Aufgaben
- Bearbeitungszeit: 1-2 Wochen (siehe Abgabedatum auf Übungsblatt!)
- Abgabe fristgerecht im ILIAS
- Rückgabe und Besprechung der korrigierten Blätter in ILIAS / Tutorien
- Lösungen auf der Webseite
- Ausgabe des ersten Übungsblatts: [Donnerstag 21.10.2021](#)

# Übungsblätter

- Doppelabgabe erlaubt, wenn beide für das gleiche Tutorium eingeteilt sind
- Übungsblätter müssen handschriftlich sein
- kein Abschreiben!
- 25% der möglichen Gesamtpunktzahl  $\rightsquigarrow$  1 Bonuspunkt  
50% der möglichen Gesamtpunktzahl  $\rightsquigarrow$  2 Bonuspunkte  
75% der möglichen Gesamtpunktzahl  $\rightsquigarrow$  3 Bonuspunkte
- Der Klausurbonus wird nur auf bestandene Klausuren angerechnet



- Hauptklausur: [6. April 2022](#) um 8:00 Uhr.
- Dauer: 2 Stunden
- Orientierung: Altklausuren auf der Homepage, Übungsblätter
- Termin für Nachklausur wird noch bekannt gegeben.

# Tutorien

- Rückgabe und Besprechung der Übungsblätter
- Zusätzliche Aufgaben und Beispiele zum Stoff der Vorlesung
- Start: Nächste Woche (ab 25.10.2021)
- **Einteilung über WebInScribe**
  - <http://webinscribe.informatik.kit.edu/>
- Genauere Informationen auf der Homepage

# Ziele der Vorlesung TGI

Welche Fragestellungen werden in TGI behandelt?

- Theoretische Grundlagen zu Algorithmen- und Programmentwurf:  
Wie kann man allgemeingültige (rechner- und programmiersprachenunabhängige) Aussagen zu gegebenen Problemstellungen machen?
- Wie kann man konkrete Computer abstrakt betrachten oder modellieren?
- Wie kann man Probleme abstrakt betrachten oder modellieren?
- Gibt es Probleme, für die Ausprobieren die beste Lösungsstrategie ist?
- Gibt es Probleme die nicht von Computern gelöst werden können?

# Ziele der Vorlesung TGI

Welche Kompetenzen sollen Sie erlernen?

- Vertiefter Einblick in die Grundlagen der Theoretischen Informatik
- Beherrschen der Berechnungsmodelle und Beweistechniken der TI
- Verständnis für Grenzen und Möglichkeiten der Informatik in Bezug auf die Lösung von definierbaren aber nur bedingt berechenbaren Problemen
- Abstraktionsvermögen für grundlegende Aspekte der Informatik von konkreten Rechnern oder Programmiersprachen
- Anwendung der erlernten Beweistechniken

# Wiederholung aus Grundbegriffe der Informatik

- Wörter
- Formale Sprachen
- Reguläre Ausdrücke
- Endliche Automaten
- Kontextfreie Grammatiken

# Wörter

- Ein *Alphabet*  $\Sigma$  ist eine endliche Menge von Zeichen.  
Beispiele:  $\Sigma = \{0, 1\}$  oder  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{, \} \cup \{.\}$ .
- Ein *Wort*  $w$  über einem Alphabet  $\Sigma$  ist eine (möglicherweise leere) Folge von Zeichen aus  $\Sigma$ .  
Beispiel:  $\Sigma = \{0, 1\}$  und  $w = 0010010$ .  
 $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{, \} \cup \{.\}$  und  $w = 1.024, 48$
- Das *leere Wort* wird mit  $\varepsilon$  symbolisiert.
- Die *Menge aller Wörter* über einem Alphabet  $\Sigma$  wird mit  $\Sigma^*$  abgekürzt.  
Beispiel:  $\Sigma = \{0, 1\}$  und  $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$   
 $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{, \} \cup \{.\}$   
 $\rightsquigarrow \varepsilon$  und  $1..0.4$  und  $.,.7$  etc. in  $\Sigma^*$

# Wörter

- Die *Menge aller Wörter* mit Länge  $n$  über einem Alphabet  $\Sigma$  wird mit  $\Sigma^n$  abgekürzt.

Beispiel  $\Sigma = \{0, 1\}$ :

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$

$$\Sigma^1 = \{0, 1\}$$

$$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

- Die *Konkatenation* (Aneinanderhängen) zweier Wörter  $w_1$  und  $w_2$  wird mit  $w_1 \cdot w_2$  oder  $w_1 w_2$  abgekürzt.

Beispiel:  $w_1 = 001$  und  $w_2 = 110$  dann  $w_1 \cdot w_2 = 001110$ .

$w_1 = 001$  und  $w_2 = \varepsilon$  dann  $w_1 \cdot w_2 = 001$ .

# Wörter

- Die *iterierte Konkatination* eines Wortes  $w$  ist  $w^k := \underbrace{w \cdot \dots \cdot w}_{k\text{-mal}}$

Beispiel:  $w = 110$ .

$$w^0 = \varepsilon$$

$$w^1 = 110$$

$$w^2 = 110 \cdot 110 = 110110$$

$$w^3 = 110 \cdot 110 \cdot 110 = 110110110$$



# Formale Sprachen

- Eine *formale Sprache*  $L$  über einem Alphabet  $\Sigma$  ist eine Teilmenge  $L \subseteq \Sigma^*$ .

Beispiel: Sprache  $L'$  aller Wörter deren vorletztes Zeichen 0 ist

$$L' = \{w0z \mid w \in \Sigma^*, z \in \Sigma\}$$

- Das Produkt  $L_1 \cdot L_2$  der Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  ist definiert als

$$L_1 \cdot L_2 := \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

Beispiel:

$$L' = \Sigma^* \cdot \{0\} \cdot \Sigma$$

# Formale Sprachen

- Produkte einer Sprache  $L$  mit sich selbst werden abgekürzt als

$$L^k := \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_{k\text{-mal}}$$

Beispiel  $L = \{00, 1\}$ :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^1 = \{00, 1\}$$

$$L^2 = \{00, 1\} \cdot \{00, 1\} = \{0000, 001, 100, 11\}$$

$$L^3 = \{0000, 001, 100, 11\} \cdot \{00, 1\}$$

$$= \{000000, 00100, 10000, 1100, 00001, 0011, 1001, 111\}$$

# Formale Sprachen

Lässt sich ein Wort  $w$  schreiben als  $w = u \cdot v \cdot x$ , wobei  $u, v, x$  beliebige Wörter sind, so heißt:

$u$	Präfix	}	von $w$
$v$	Teilwort		
$x$	Suffix		

Beispiel  $w = \text{TAL}$

Präfixe	$P = \{\varepsilon, T, TA, TAL\}$
Suffixe	$S = \{\varepsilon, L, AL, TAL\}$
Teilworte	$\{A\} \cup P \cup S$

# Formale Sprachen

Seien  $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  Sprachen.

Produktsprache	$L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
$k$ -faches Produkt	$L^k := \{w_1 \cdot \dots \cdot w_k \mid w_i \in L \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$ $L^1 = L, \quad L^0 := \{\varepsilon\}$
Kleene'scher Abschluss	$L^* := \bigcup_{i \geq 0} L^i$
Positiver Abschluss	$L^+ := \bigcup_{i \geq 1} L^i$
Quotientensprache	$L_1/L_2 := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in L_2 \text{ mit } w \cdot z \in L_1\}$
Komplementsprache	$L^c := \Sigma^* \setminus L$

# Reguläre Sprachen

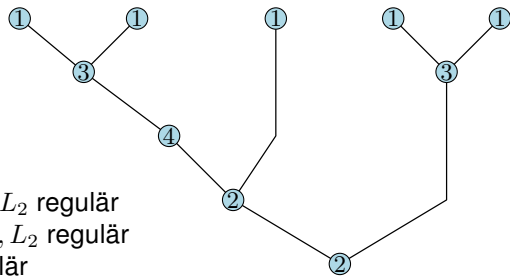
Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt *regulär*, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt: (induktive Definition)

- Verankerung:
  - $L = \{a\}$  mit  $a \in \Sigma$  oder
  - $L = \{\varepsilon\}$  oder
  - $L = \emptyset$
- Induktion: Es gibt reguläre Sprachen  $L_1, L_2$  sodass
  - $L = L_1 \cdot L_2$  oder
  - $L = L_1 \cup L_2$  oder
  - $L = L_1^*$

# Reguläre Sprachen

Beispiel: Die Sprache  $L'$  aller Wörter über  $\{0, 1\}$ , die als vorletztes Zeichen eine 0 haben

$$L' := (\{0\} \cup \{1\})^* \cdot \{0\} \cdot (\{0\} \cup \{1\})$$



Verankerung:

①  $L = \{a\}$  mit  $a \in \Sigma$

Induktion:

②  $L = L_1 \cdot L_2$  mit  $L_1, L_2$  regulär

③  $L = L_1 \cup L_2$  mit  $L_1, L_2$  regulär

④  $L = L_1^*$  mit  $L_1$  regulär

# Reguläre Ausdrücke

- Wir benutzen eine leicht andere Schreibweise für reguläre Ausdrücke als in GBI.
- Sei  $\Sigma$  eine Alphabet. Eine reguläre Sprache über  $\Sigma$  kann durch einen **regulären Ausdruck** beschrieben werden.
- Mit  $L(\alpha)$  bezeichnen wir die Sprache die über den regulären Ausdruck  $\alpha$  beschrieben ist.
- *Achtung:* Verschiedene reguläre Ausdrücke können die gleiche Sprache beschreiben.

$L(\alpha) = L(\beta)$  trotz  $\alpha \neq \beta$  ist möglich!

# Reguläre Ausdrücke

Dabei bezeichnet

- $\emptyset$  den regulären Ausdruck, der die leere Menge beschreibt.

$$\rightsquigarrow L(\emptyset) = \{\}$$

- $\varepsilon$  den regulären Ausdruck, der die Menge  $\{\varepsilon\}$  beschreibt.

$$\rightsquigarrow L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$$

- $a$  den regulären Ausdruck, der die Menge  $\{a\}$  beschreibt.

$$\rightsquigarrow L(a) = \{a\}$$

Wenn  $\alpha, \beta$  reguläre Ausdrücke sind, die die Sprachen  $L(\alpha), L(\beta)$  beschreiben, so schreiben wir

- $(\alpha) \cup (\beta)$  für  $L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $(\alpha) \cdot (\beta)$  für  $L(\alpha) \cdot L(\beta)$
- $(\alpha)^+$  für  $L(\alpha)^+$
- $(\alpha)^*$  für  $L(\alpha)^*$



# Reguläre Ausdrücke

## Notation

- Wir manchmal schreiben auch  $\alpha$  statt  $L(\alpha)$  und  $w \in \alpha$  statt  $w \in L(\alpha)$ .
- $*$  bindet stärker als  $\cdot$  und  $\cdot$  stärker als  $\cup$
- Das heißt zum Beispiel:

$$a \cup b \cdot c = a \cup (b \cdot c) = a \cup bc$$

- Wir lassen Konkatenationspunkte und unnötige Klammern weg.

## Reguläre Ausdrücke - Beispiele

- $L'$  ist der reguläre Ausdruck für die Sprache aller Wörter über  $\{0, 1\}$ , die als vorletztes Zeichen eine 0 haben

$$L' = (0 \cup 1)^* 0 (0 \cup 1)$$

- $L := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält } 10 \text{ als Teilwort}\}$

$$L = (0 \cup 1)^* 10 (0 \cup 1)^*$$

- $L := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält } 101 \text{ als Teilwort}\}$

$$L = (0 \cup 1)^* 101 (0 \cup 1)^*$$

## Reguläre Ausdrücke - Beispiele

- $L := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält } 10 \text{ nicht als Teilwort}\} = 0^*1^*$ , denn
  - Sei  $w \in 0^*1^*$ . Dann kommt in  $w$  nach keiner 1 eine 0.  
Also ist  $w \in L$  und damit  $0^*1^* \subseteq L$ .
  - Sei  $w \in L$ . Dann kommen nach der ersten Eins keine Nullen mehr vor,  
d.h.  $w = w'1 \dots 1$  wobei  $w'$  keine 1 enthält. Also ist  $w \in 0^*1^*$  und damit  $L \subseteq 0^*1^*$ .

## Reguläre Ausdrücke - Beispiele

- $L := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält } 10 \text{ nicht als Teilwort}\} = 0^*1^*$ , denn
  - Sei  $w \in 0^*1^*$ . Dann kommt in  $w$  nach keiner 1 eine 0.  
Also ist  $w \in L$  und damit  $0^*1^* \subseteq L$ .
  - Sei  $w \in L$ . Dann kommen nach der ersten Eins keine Nullen mehr vor,  
d.h.  $w = w'1 \dots 1$  wobei  $w'$  keine 1 enthält. Also ist  $w \in 0^*1^*$  und damit  $L \subseteq 0^*1^*$ .

### Testen Sie sich:

Sei  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{.,\} \cup \{.\}$ .

Sei  $L_{\mathbb{R}} \subseteq \Sigma^*$  die Sprache aller endlichen Dezimaldarstellungen von positiven reellen Zahlen.

Beispiele:  $1.024, 48 \in L_{\mathbb{R}}$  und  $42 \in L_{\mathbb{R}}$

aber  $1024, 48 \notin L_{\mathbb{R}}$  und  $042, 00 \notin L_{\mathbb{R}}$  und  $.,.123 \notin L_{\mathbb{R}}$

↪ Finden Sie einen regulären Ausdruck für  $L_{\mathbb{R}}$ ?

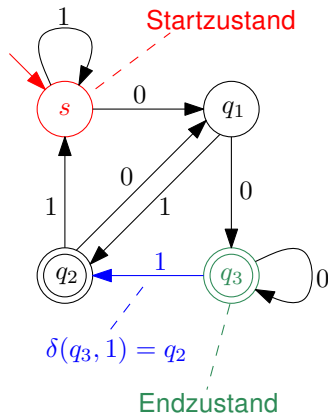
# Endliche Automaten

- In GBI wurden Mealy- und Moore-Automaten behandelt.
- In TGI werden nur endliche Akzeptoren benötigt.

# Endliche Automaten

Ein (deterministischer) endlicher Automat DEA  $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$  besteht aus:

- $Q$ , einer endlichen Menge von Zuständen
- $\Sigma$ , einer endlichen Menge von Eingabesymbolen
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ , einer Übergangsfunktion
- $s \in Q$ , einem Startzustand;
- $F \subseteq Q$ , einer Menge von Endzuständen.



# Endliche Automaten

Der Automat heißt

- **endlich**, da die Zustandsmenge (vgl. mit Speicher, Gedächtnis) endlich ist.
- **deterministisch**, da  $\delta$  eine Funktion ist und der Automat somit in jedem Schritt eindeutig arbeitet. Es gibt keine Zufälligkeiten oder Wahlmöglichkeiten.

Was kann ein endlicher Automat?

- Gegeben ist eine Eingabe als endliche Folge von Eingabesymbolen. Der Automat entscheidet, ob die Eingabe zulässig ist oder nicht, indem er in einem Endzustand endet oder nicht.

# Endliche Automaten

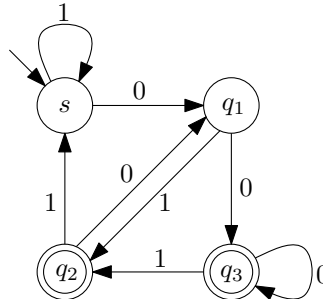
- Ein endlicher Automat **erkennt** oder **akzeptiert** eine Sprache  $L$ , d.h. eine Menge von Wörtern über dem Alphabet  $\Sigma$  des Automaten, wenn er nach **Abarbeitung eines Wortes  $w$**  genau dann in einem Endzustand ist, wenn das Wort  $w$  in der Sprache  $L$  ist ( $w \in L$ ).
- Eine formale Sprache heißt *endliche Automatensprache*, wenn es einen endlichen Automaten gibt, der sie erkennt.



# Endliche Automaten

Der Automat

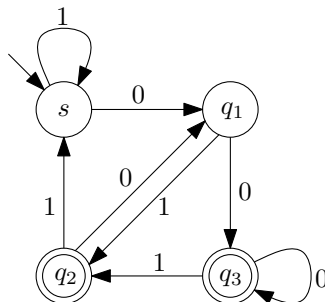
- akzeptiert  $w = 001$ .
- akzeptiert nicht  $w = 110$ .



# Endliche Automaten

Der Automat

- akzeptiert  $w = 001$ .
- akzeptiert nicht  $w = 110$ .



Der Automat erkennt die Sprache  $L'$  aller Wörter,  
 deren vorletztes Zeichen 0 ist:  $L' = (0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$

$\rightsquigarrow L'$  ist eine endliche Automatensprache.

# Kontextfreie Grammatiken

Eine kontextfreie Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  ist gegeben durch

- ein endliches Alphabet  $\Sigma$  (auch Terminalalphabet genannt)
- eine endliche Menge  $V$  mit  $V \cap \Sigma = \emptyset$  von **Variablen** (auch Nichtterminale genannt)
- ein **Startsymbol**  $S \in V$
- eine endliche Menge von **Ableitungsregeln**  $R$ ,  
d.h. durch eine Menge von Tupeln  $(l, r) \in V \times (\Sigma \cup V)^*$   
(auch Produktionen genannt)

Wir schreiben Produktionen auch in der Form  $l \rightarrow r$ .

# Kontextfreie Grammatiken

Gegeben ist eine Regel  $l \rightarrow r$ .

- Wenn in einem Wort  $w$  das Zeichen  $l$  vorhanden ist, darf  $l$  in  $w$  durch  $r$  ersetzt werden.
- Wir schreiben  $w \rightarrow z$ , wenn  $w$  durch Anwendung *einer* Ableitungsregel in  $z$  umgewandelt werden kann.
- Wir schreiben  $w \xrightarrow{*} z$ , wenn  $w$  durch Anwendung einer, keiner oder *mehrerer* Ableitungsregeln in  $z$  umgewandelt werden kann.

Die von einer Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  erzeugte Sprache  $L(G)$  ist die Menge aller Wörter  $z \in \Sigma^*$  für die gilt  $S \xrightarrow{*} z$ .

## Beispiel Kontextfreie Grammatiken

Gegeben ist die Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  mit

$$\Sigma := \{0, 1\}$$

$$V := \{S\}$$

$$R := \{S \rightarrow 01, S \rightarrow 0S1\} \text{ wir schreiben dafür kurz } \{S \rightarrow 01|0S1\}$$

## Beispiel Kontextfreie Grammatiken

Gegeben ist die Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  mit

$$\Sigma := \{0, 1\}$$

$$V := \{S\}$$

$$R := \{S \rightarrow 01, S \rightarrow 0S1\} \text{ wir schreiben dafür kurz } \{S \rightarrow 01|0S1\}$$

Welche Wörter erzeugt  $G$ , d.h. was ist  $L(G)$ ?

## Beispiel Kontextfreie Grammatiken

Gegeben ist die Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  mit

$$\Sigma := \{0, 1\}$$

$$V := \{S\}$$

$$R := \{S \rightarrow 01, S \rightarrow 0S1\} \text{ wir schreiben dafür kurz } \{S \rightarrow 01|0S1\}$$

Welche Wörter erzeugt  $G$ , d.h. was ist  $L(G)$ ?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 01|0S1 \rightarrow 01|0011|00S11 \\ &\rightarrow 01|0011|000111|000S111 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

## Beispiel Kontextfreie Grammatiken

Gegeben ist die Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  mit

$$\Sigma := \{0, 1\}$$

$$V := \{S\}$$

$$R := \{S \rightarrow 01, S \rightarrow 0S1\} \text{ wir schreiben dafür kurz } \{S \rightarrow 01|0S1\}$$

Welche Wörter erzeugt  $G$ , d.h. was ist  $L(G)$ ?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 01|0S1 \rightarrow 01|0011|00S11 \\ &\rightarrow 01|0011|000111|000S111 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Es ist  $L(G) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .