Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

# Übungsblatt 4

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 21/22

**Ausgabe:** 3. Dezember
**Abgabe:** 17. Dezember (digital im ILIAS)

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

## Aufgabe 1 (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben seien eine Menge $V$ von Studierenden und eine Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von Bekanntschaften. Für $u \neq v \in V$ gilt also $\{u, v\} \in E$ genau dann, wenn $u$ und $v$ einander kennen. Weiterhin sei eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wir betrachten die folgenden beiden Entscheidungsprobleme:

(a) Wir wollen das Risiko von Abschreiben in der Klausur minimieren. Deswegen ist bei dem Problem Hörsaalverteilung die Frage, ob man die Studierenden so auf $k$ Hörsäle verteilen kann, dass es in keinem Hörsaal zwei Personen gibt, die sich kennen.

(b) Wir sagen, dass eine Gruppe $S \subseteq V$ von Studierenden eine Lerngruppe bildet, falls sich alle Studierenden in $S$ paarweise kennen *(bitte nicht hinterfragen, wie sinnvoll diese Definition ist)*. Bei dem Problem Gruppenräume ist die Frage, ob man die Studierenden so auf $k$ Gruppenräume aufteilen kann, dass jeder Gruppenraum eine Lerngruppe bildet.

Zeigen Sie, dass beide Probleme $\mathcal{NP}$-vollständig sind. Wählen Sie jeweils eines der folgenden drei $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme für die Reduktion aus.

Clique
**Gegeben:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Parameter $k \in \mathbb{N}$
Gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit mindestens $k$ Knoten, sodass für alle $u, v \in U$ gilt: $\{u, v\} \in E$?

Color
**Gegeben:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Parameter $k \in \mathbb{N}$
Gibt es eine Färbung $c\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ von $G$ mit $k$ Farben, sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt: $c(u) \neq c(v)$?

DOMINATING SET
**Gegeben:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Parameter $k \in \mathbb{N}$
Gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit höchstens $k$ Knoten, sodass für alle $v \in V$ gilt: $v \in U$ oder $v$ ist zu einem Knoten in $U$ benachbart?

## Aufgabe 2 (3 + 2 = 5 Punkte)

Für zwei Alphabete $\Sigma_A, \Sigma_B$ und zwei Sprachen $A \subseteq \Sigma_A^*$, $B \subseteq \Sigma_B^*$ schreiben wir $A \equiv B$, falls $A \propto B$ und $B \propto A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie hierfür, dass $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv[1] ist.

(b) Zeigen Sie, dass es genau drei Äquivalenzklassen von $\equiv$ auf $\mathcal{P}$ gibt:

- $C_1 = \{\emptyset\}$
- $C_2 = \{\Sigma^* \mid \Sigma \text{ ist ein beliebiges Alphabet}\}$
- $C_3 = \mathcal{P} \setminus (C_1 \cup C_2)$

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Das Entscheidungsproblem 2021-OFT-SAT ist wie folgt definiert. Gegeben sind eine Menge $U$ von Variablen und eine Menge $C$ von Klauseln über $U$. Die Frage ist: Gibt es mindestens 2021 paarweise unterschiedliche Wahrheitsbelegungen von $U$, die $C$ erfüllen? Zeigen Sie, dass 2021-OFT-SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das Problem VOLLSTÄNDIGER PFAD ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$. Die Frage ist: gibt es einen Pfad in $G$, der jeden Knoten genau einmal besucht. Also existieren $v_1, \ldots, v_{|V|} \in V$ so, dass für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, |V|\}$ gilt $v_i \neq v_j$ und für alle $i \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$ gilt $v_i v_{i+1} \in E$?

Das Problem VOLLSTÄNDIGER KREIS ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$. Die Frage ist: gibt es einen Kreis in $G$, der jeden Knoten genau einmal besucht. Also existieren $v_1, \ldots, v_{|V|} \in V$ so, dass für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, |V|\}$ gilt $v_i \neq v_j$, für alle $i \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$ gilt $v_i v_{i+1} \in E$ und es gilt $v_{|V|} v_1 \in E$?

Zeigen Sie, dass das Problem VOLLSTÄNDIGER KREIS $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Sie dürfen benutzen, dass das Problem VOLLSTÄNDIGER PFAD $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

[1] Aussage aus der Vorlesung, die hier bewiesen werden muss

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Nachdem der Pizza-Lieferdienst letztes Jahr so erfolgreich war, möchte Dr. Meta nun sein Unternehmen weiter expandieren und eine Mensa mit insgesamt $p$ Linien (die aber alle das gleiche Essen kochen) für die Menge der Studierenden $S$ eröffnen. Da sein Budget noch relativ begrenzt ist, kann jede Linie höchstens $q \in \mathbb{N}_0$ Portionen kochen. Die Studierenden können unterschiedlich viele Portionen essen. Dabei gibt die Funktion $g \colon S \to \mathbb{N}_0$ für jede Person $s \in S$ an, wie viele Portionen $s$ essen möchte. Kann Dr. Meta die Studierenden auf die $p$ Linien verteilen, sodass jede Person $s$ sich die gewünschte Anzahl $g(s)$ an Portionen kaufen kann, aber keine Linie mehr als $q$ Portionen kochen muss?

Zeigen Sie, dass Dr. Metas Problem $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

*Hinweis*: Verwenden Sie, dass das Problem PARTITION aus der Vorlesung $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

Sei $\Pi$ ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem. Zeigen Sie: Falls $\Pi$ in co-$\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$.

**Aufgabe 7** (5 Punkte)

Das Entscheidungsproblem SEMINAR-BEWERBUNG ist wie folgt definiert. Gegeben seien eine Menge $A$ von Studierenden, die sich für ein Seminar beworben haben, wobei $|A|$ gerade ist, und eine Menge $B \subseteq \binom{A}{2}$ von Paaren von Studierenden. Für $x \neq y \in A$ bedeutet $\{x, y\} \in B$, dass $x$ und $y$ in der Lage sind, zusammen produktiv zu arbeiten. Eine Betreuerin fragt sich bei diesem Problem, ob es möglich ist, die Hälfte der Bewerber:innen auszuwählen, sodass diese zusammen im Seminar produktiv arbeiten können. Formal ist die Frage wie folgt definiert: Gibt es eine Teilmenge $C \subseteq A$ der Größe $|A|/2$, sodass für alle $p \neq q \in C$ gilt, dass $\{p, q\} \in B$? Zeigen Sie, dass SEMINAR-BEWERBUNG $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie das $\mathcal{NP}$-vollständige Problem CLIQUE aus der Vorlesung für die Reduktion.