Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 3

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 21/22

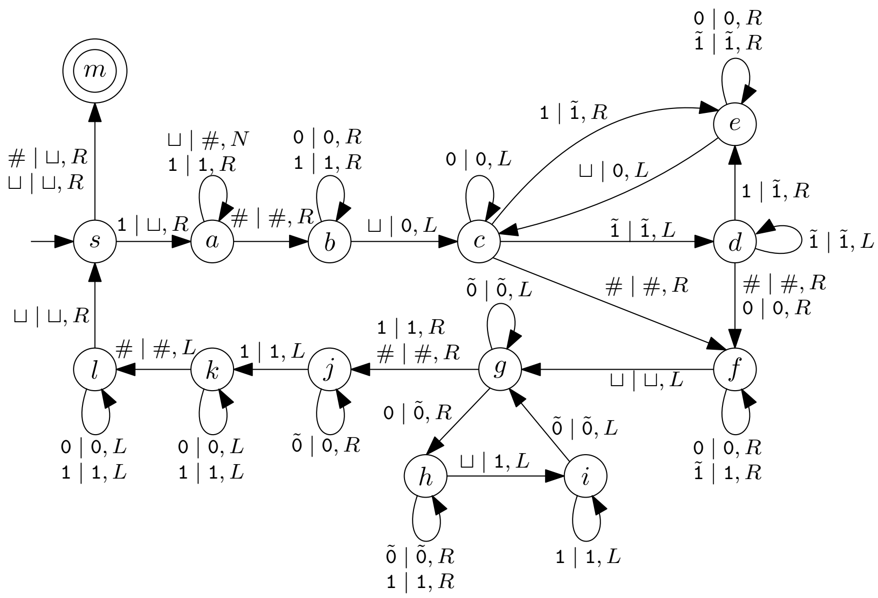
Ausgabe: 19. November 2021
Abgabe: 3. Dezember 2021 (digital im ILIAS)

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

Aufgabe 1

(2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Die Turing-Maschine $\mathcal{M} = (Q, \Sigma = \{1\}, \Gamma = \{0, \tilde{0}, 1, \tilde{1}, \#, \sqcup\}, \delta, s, \{m\})$ wird durch den folgenden Zustandsgraphen beschrieben.



(a) Simulieren Sie die Turing-Maschine $\mathcal{M}$ auf der Eingabe 11, bis Sie zum zweiten Mal in den Zustand s gelangen. Geben Sie alle Konfigurationen an, die dabei auftreten.

(b) Welche Ausgabe produziert die Turing-Maschine $\mathcal{M}$ auf der Eingabe 11?

(c) Was ist die Aufgabe der Zustandsmengen $\{s, a, b, c, e, d, f\}$, $\{g, h, i\}$ und $\{j, k, l\}$?

(d) Welche Funktion berechnet $\mathcal{M}$?

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

(a) Gegeben eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen, existieren Zahlen $a, b, c \in M$ mit $a + b^2 = c^3$?

(b) LONGEST PATH: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$, existiert ein Pfad in G mit k Knoten? (Ein Pfad mit k Knoten ist eine Folge von paarweise unterschiedlichen Knoten $v_1, \dots, v_k \in V$, sodass $v_i v_{i+1} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$.)

Geben Sie für jedes dieser Probleme eine Ja-Instanz und eine Nein-Instanz an. Beschreiben Sie außerdem, wie eine Orakel-TM arbeitet, die das Problem in polynomieller Zeit löst. Geben Sie dazu insbesondere an:

(i) wie die Instanzen kodiert werden,

(ii) wie die Orakel-TM den Lösungsvorschlag des Orakelmoduls interpretiert und

(iii) was der deterministische Teil der Orakel-TM tun muss, um den Lösungsvorschlag zu überprüfen. Begründen sie kurz die polynomielle Laufzeit.

Aufgabe 3 (3 + 2 = 5 Punkte)

Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass die Sprache

$$L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid L(\mathcal{M}) \text{ ist unentscheidbar}\}$$

unentscheidbar ist.

(a) Für eine Eingabe $w\#v$, konstruieren Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{M}^{wv}$, sodass gilt:

$$L(\mathcal{M}^{wv}) \text{ ist unentscheidbar} \iff T_w \text{ akzeptiert } v.$$

(b) Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist. Nehmen Sie dazu an, dass es eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_L$ gibt, die L entscheidet, und verwenden Sie $\mathcal{M}_L$, um die universelle Sprache zu entscheiden.

Sie dürfen die Aussage der Teilaufgabe (a) verwenden, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid L(\mathcal{M}) = \emptyset\}.$$

Zeigen Sie, dass L^c semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 5

(1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 8 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine deterministische Turing-Maschine, die eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ akzeptiert. Dann akzeptiert die Turing-Maschine $\mathcal{M}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, Q \setminus F)$ genau die Sprache L^c.

(b) Sei L eine entscheidbare Sprache und L_1, L_2 semi-entscheidbare Sprachen mit:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset, L_1 \cup L_2 = L.$$

Dann ist L_1 auch entscheidbar.

(c) Sei L eine entscheidbare Sprache und L_1, L_2 semi-entscheidbare Sprachen mit:

$$L_1 \cup L_2 = L.$$

Dann ist L_1 auch entscheidbar.

(d) Sei L_1 eine entscheidbare Sprache und $L_1 \cap L_2$ eine entscheidbare Sprache. Dann ist auch L_2 entscheidbar.

(e) Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.

(f) Für jede unentscheidbare Sprache gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.

Aufgabe 6

(2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Wir erweitern das Modell einer Turing-Maschine, indem wir einen weiteren Kopf hinzufügen. Die Köpfe haben eine gemeinsame Zustandsmenge Q und gemeinsame Eingabe- und Bandalphabete Σ und Γ. Beide Köpfe arbeiten auf dem selben Band, wobei abwechselnd je ein Schritt der Übergangsfunktionen für Kopf 1 und Kopf 2 ausgeführt wird. Auch wenn Kopf 2 an der Reihe ist, ist bekannt, was Kopf 1 gerade liest, und umgekehrt. Die Übergangsfunktion hat also die Form

$$\delta\colon Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{1, 2\} \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\},$$

wobei der vierte Parameter angibt, welcher Kopf an der Reihe ist. Die Übergangsfunktion wird also abwechselnd mit 1 bzw. 2 als viertes Argument aufgerufen. Wir nennen eine solche Turing-Maschine eine 2-*Kopf-Turing-Maschine*.

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, \#\}$. Beschreiben Sie eine 2-Kopf-Turing-Maschine, die die Spiegelsprache $\{w\#w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, wobei w^R das Spiegelwort von w bezeichne, in Linearzeit erkennt. Begründen Sie kurz die Laufzeit.

(b) Zeigen Sie, dass 2-Kopf-Turing-Maschinen und klassische Turing-Maschinen (d.h. 1 Kopf, 1 Band, wie in Vorlesung definiert) gleich mächtig sind. Simulieren Sie hierzu eine klassische Turing-Maschine mit einer 2-Kopf-Turing-Maschine und umgekehrt.

(c) Wir entfernen nun den vierten Parameter aus der Übergangsfunktion, sodass sich beide Köpfe bei gleichem Zustand und gleichen gelesenen Symbolen gleich verhalten. Die Übergangsfunktion hat jetzt also die Form

$$\delta'\colon Q \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}.$$

Wir nennen eine solche Turing-Maschine eine *Zwillingskopf-Turing-Maschine*.

Zeigen Sie, dass 2-Kopf-Turing-Maschinen und Zwillingskopf-Turing-Maschinen gleich mächtig sind. Simulieren Sie hierzu eine Zwillingskopf-Turing-Maschine mit einer 2-Kopf-Turing-Maschine und umgekehrt.