Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 21/22

Ausgabe: 5. November 2021
Abgabe: 19. November 2021 (digital im ILIAS)

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

Aufgabe 1 (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien eine endliche Zustandsmenge Q mit $|Q| = m$ und ein endliches Alphabet Σ mit $|\Sigma| = n$.

(a) Wie viele unterschiedliche DEAs $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ existieren mit Zustandsmenge Q über dem Alphabet Σ?

(b) Wie viele unterschiedliche NEAs $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **ohne ε-Übergänge** existieren mit Zustandsmenge Q über dem Alphabet Σ?

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils alle Äquivalenzklassen der Nerode-Relation (in Mengenschreibweise) an. Geben Sie außerdem für jede Äquivalenzklasse K die Menge S_K der gültigen Suffixe an, also die Menge aller $z \in \Sigma^*$, sodass für jedes $u \in K$ gilt: $uz \in L_i$. Ist die jeweilige Sprache regulär? Falls ja, geben Sie einen DEA mit minimaler Anzahl von Zuständen an, der die Sprache akzeptiert.

(a) $L_1 = \{w \in \{\mathsf{0}, \mathsf{1}, \mathsf{2}\}^* \mid w \text{ enthält } \mathsf{012} \text{ als Teilwort}\}$

(b) $L_2 = \left\{\mathsf{a}^i \mathsf{b}^{i^5} \mid i \in \mathbb{N}_0\right\}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_i &= x_{i-1} + x_{i-2} \text{ für alle } i \geq 2 \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Sprache $L = \{\mathtt{0}^{x_i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie mithilfe der Nerode-Relation, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, falls die Sprache nicht regulär ist. Andernfalls rechnen Sie die Aussage des Pumping-Lemmas nach und zeigen Sie, dass die Sprache regulär ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2},\mathtt{3},\mathtt{4},\mathtt{5},\mathtt{6},\mathtt{7},\mathtt{8},\mathtt{9}\}^* \mid w$ ist die Matrikelnummer eines aktuell am KIT eingeschriebenen Studierenden$\}$

(b) $L_2 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}\mathtt{2}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n < m\}$

(c) $L_3 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}\mathtt{2}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n > m\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid w$ enthält gerade viele $\mathtt{a}$s und ungerade viele $\mathtt{b}$s$\}$

Aufgabe 5 (1 + 2 = 3 Punkte)

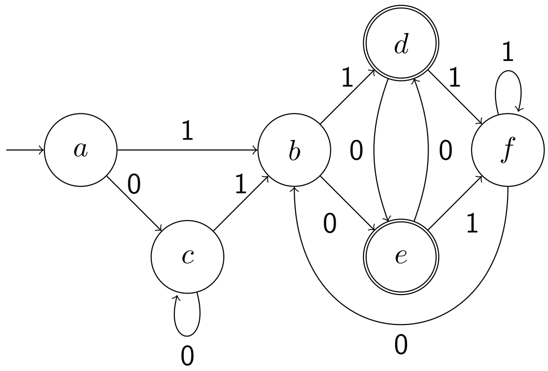
Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definieren wir die Sprache $L_f = \left\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^j\mathtt{2}^{f(i,j)} \mid i, j \in \mathbb{N}_0\right\}$.

(a) Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, sodass L_f regulär ist. Beweisen Sie!

(b) Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, sodass L_f nicht regulär ist. Beweisen Sie!

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem Automaten den zugehörigen Äquivalenzklassenautomat. Geben Sie in jedem Schritt alle Äquivalenzklassen an und durch welche Zeugen sie getrennt werden. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Äquivalenzklassenautomaten.



Aufgabe 7 (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben seien drei reguläre Sprachen A, B, C_0 über einem endlichen Alphabet Σ. Weiterhin sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Sprache C_i über dem Alphabet Σ definiert als:

$$C_i = AC_{i-1}B.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ist die Sprache C_i regulär.

(b) Die Sprache
$$C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} C_i$$
ist regulär.

Aufgabe 8 (1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Betrachten Sie die Sprachen

$$A(L) = \{w \in L \mid \text{es gibt kein echtes Präfix } w' \text{ von } w \text{ mit } w' \in L\}$$

und

$$B(L) = \{w \in L \mid \text{für alle Wörter } w' \in L \text{ ist } w \text{ kein echtes Präfix von } w'\}$$

.

(a) Bestimmen Sie $A(L_1)$ für $L_1 = \{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathsf{ba}\}$. Begründen Sie!

(b) Zeigen Sie, dass $A(L)$ regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B(L)$ regulär ist.