Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 21/22

Ausgabe: 5. November 2021
Abgabe: 19. November 2021 (digital im ILIAS)

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

Aufgabe 1 (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien eine endliche Zustandsmenge Q mit $|Q| = m$ und ein endliches Alphabet Σ mit $|\Sigma| = n$.

(a) Wie viele unterschiedliche DEAs $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ existieren mit Zustandsmenge Q über dem Alphabet Σ?

(b) Wie viele unterschiedliche NEAs $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **ohne ε-Übergänge** existieren mit Zustandsmenge Q über dem Alphabet Σ?

Lösung:
Da Q und Σ fest sind, kann man nur s, F und δ variieren. s ist ein beliebiger Zustand aus Q, also gibt es m Möglichkeiten für s. F ist eine beliebige Teilmenge von Q, also gibt es 2^m Möglichkeiten für F. Es bleibt nur noch die Möglichkeiten für δ zu zählen.

(a) Für den Fall eines DEAs ist δ eine Abbildung $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$. Also bildet δ jedes Paar $(q, x) \in Q \times \Sigma$ (es gibt $|Q| \cdot |\Sigma| = mn$ solche Paare) auf ein Element $y \in Q$ (es gibt $|Q| = m$ solche Elemente) ab. Dann gibt es für jedes der mn Paare m Möglichkeiten, also gibt es m^{mn} Möglichkeiten für δ. Somit gibt es

$$m2^m m^{mn}$$

unterschiedliche DEAs.

(b) Für den Fall eines NEAs ist δ eine Abbildung $\delta\colon Q \times \Sigma \to 2^Q$. Also bildet δ jedes Paar $(q, x) \in Q \times \Sigma$ (es gibt $|Q| \cdot |\Sigma| = mn$ solche Paare) auf ein Element $Y \in 2^Q$ (es gibt $|2^Q| = 2^m$ solche Elemente) ab. Dann gibt es für jedes der mn Paare 2^m Möglichkeiten, also gibt es

$$(2^m)^{mn} = 2^{m(mn)} = 2^{m^2 n}$$

Möglichkeiten für δ. Somit gibt es

$$m2^m 2^{m^2 n} = m2^{m+m^2 n}$$

unterschiedliche NEAs ohne ε-Übergänge.

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils alle Äquivalenzklassen der Nerode-Relation (in Mengenschreibweise) an. Geben Sie außerdem für jede Äquivalenzklasse K die Menge S_K der gültigen Suffixe an, also die Menge aller $z \in \Sigma^*$, sodass für jedes $u \in K$ gilt: $uz \in L_i$. Ist die jeweilige Sprache regulär? Falls ja, geben Sie einen DEA mit minimaler Anzahl von Zuständen an, der die Sprache akzeptiert.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w \text{ enthält } 012 \text{ als Teilwort}\}$

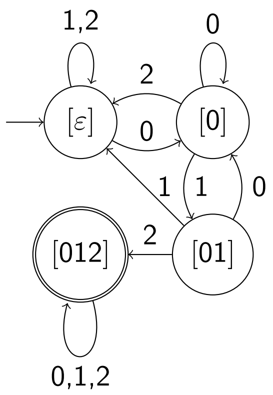
(b) $L_2 = \left\{\mathsf{a}^i \mathsf{b}^{i^5} \mid i \in \mathbb{N}_0\right\}$

Lösung:

(a) R_{L_1} besitzt vier Äquivalenzklassen:

- $$[012] = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w \text{ enthält } 012 \text{ als Teilwort}\} = L_2$$
  mit
  $$S_{[012]} = \{0,1,2\}^*$$
- $$[01] = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w \text{ enthält } 012 \text{ nicht als Teilwort und endet mit } 01\}$$
  mit
  $$S_{[01]} = \{2u \mid u \in \{0,1,2\}^*\} \cup L_2$$
- $$[0] = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w \text{ enthält } 012 \text{ nicht als Teilwort und endet mit } 0\}$$
  mit
  $$S_{[0]} = \{12u \mid u \in \{0,1,2\}^*\} \cup L_2$$
- $$\begin{aligned}[\varepsilon] &= \{0,1,2\}^* \setminus ([012] \cup [01] \cup [0]) \\ &= \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w \text{ enthält } 012 \text{ nicht als Teilwort und endet weder mit } 0 \text{ noch mit } 01\}\end{aligned}$$
  mit
  $$S_{[\varepsilon]} = L_2.$$

Also gibt es endlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache L_1 ist nach dem Satz von Nerode regulär. Der minimale DEA ergibt sich aus den Äquivalenzklassen:



(b) R_{L_2} besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen:

- Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ bildet a^j eine eigene Äquivalenzklasse:
$$\left[\mathsf{a}^j\right] = \left\{\mathsf{a}^j\right\}$$
mit
$$S_{[\mathsf{a}^j]} = \left\{\mathsf{a}^k\mathsf{b}^{(k+j)^5} \mid k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

- Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gibt es eine Äquivalenzklasse
$$\left[\mathsf{a}^{j+1}\mathsf{b}^{(j+1)^5-j}\right] = \left\{\mathsf{a}^k\mathsf{b}^{k^5-j} \mid k \in \mathbb{N}, k^5 > j\right\}$$
mit
$$S_{\left[\mathsf{a}^{j+1}\mathsf{b}^{(j+1)^5-j}\right]} = \left\{\mathsf{b}^j\right\}$$

- Die letzte Äquivalenzklasse wird von "Nicht-Präfixen" von L_2 gebildet:
$$[\mathsf{b}] = \{w \mid w \text{ enthält } \mathsf{ba} \text{ als Teilwort}\} \cup \left\{\mathsf{a}^j\mathsf{b}^k \mid j,k \in \mathbb{N}_0, k > j^5\right\}$$
mit
$$S_{[\mathsf{b}]} = \emptyset.$$

Die Nerode-Relation von L_2 enthält unendlich viele Äquivalenzklassen und somit ist L_2 nach dem Satz von Nerode nicht regulär.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_i &= x_{i-1} + x_{i-2} \text{ für alle } i \geq 2 \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Sprache $L = \{\mathsf{0}^{x_i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie mithilfe der Nerode-Relation, dass L nicht regulär ist.

Lösung:
Wir zeigen, dass die Nerode-Relation von L unendlich viele Äquivalenzklassen hat. Beobachte, dass die Fibonacci-Folge monoton wachsend und ab x_2 streng monoton wachsend ist. Betrachte für $3 \leq n < m$ die Wörter $\mathsf{0}^{x_n}$ und $\mathsf{0}^{x_m}$. Für das Suffix $z = \mathsf{0}^{x_{n-1}}$ erhalten wir das Folgende:

$$\mathsf{0}^{x_n}z = \mathsf{0}^{x_n}\mathsf{0}^{x_{n-1}} = \mathsf{0}^{x_n+x_{n-1}} = \mathsf{0}^{x_{n+2}} \in L$$

Es gilt außerdem
$$x_m < x_m + x_{n-1} < x_m + x_{m-1} = x_{m+1},$$
also liegt $x_m + x_{n-1}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Fibonacci-Folge und ist somit kein Glied dieser Folge. Also gilt
$$\mathsf{0}^{x_m}z = \mathsf{0}^{x_m}\mathsf{0}^{x_{n-1}} \notin L.$$

Deswegen sind $[\mathsf{0}^{x_3}], [\mathsf{0}^{x_4}], [\mathsf{0}^{x_5}], \ldots$ paarweise unterschiedliche Äquivalenzklassen. Also hat die Nerode-Relation von L unendlich viele Äquivalenzklassen und L ist nach dem Satz von Nerode nicht regulär.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, falls die Sprache nicht regulär ist. Andernfalls rechnen Sie die Aussage des Pumping-Lemmas nach und zeigen Sie, dass die Sprache regulär ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^* \mid w$ ist die Matrikelnummer eines aktuell am KIT eingeschriebenen Studierenden$\}$

(b) $L_2 = \{0^n12^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n < m\}$

(c) $L_3 = \{0^n12^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n > m\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält gerade viele as und ungerade viele bs$\}$

Lösung:

(a) Die Sprache L_1 erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas für $n = 7$. Da es keine Matrikelnummer der Länge größer als 7 gibt, ist die zugrundeliegende Menge leer und die Aussage ist erfüllt. Da L_1 endlich ist, ist L_1 regulär.

(b) Wir zeigen, dass die Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt ist und somit L_2 nicht regulär sein kann.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir wählen $w = 0^n12^{n+1}$. Offensichtlich gilt $w \in L_2$ mit $|w| > n$. Betrachte eine beliebige Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$. Dann gilt $u = 0^i$, $v = 0^j$ für Zahlen i, j mit $i + j \leq n, j > 0$. Das Wort $uv^2x = 0^{n+j}12^{n+1}$ liegt nicht in L_2, da $n + j \geq n + 1$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort in L_2 der Länge größer als n, für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert. Also ist L_2 nicht regulär.

(c) Wir zeigen, dass die Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt ist und somit L_3 nicht regulär sein kann.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir wählen $w = 0^{n+1}12^n$. Offensichtlich gilt $w \in L_3$ mit $|w| > n$. Betrachte eine beliebige Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$. Dann gilt $u = 0^i$, $v = 0^j$ für Zahlen i, j mit $i + j \leq n, j > 0$. Das Wort $uv^0x = 0^{n+1-j}12^n$ liegt nicht in L_3, da $n + 1 - j \leq n$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort in L_3 der Länge größer als n, für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert. Also ist L_3 nicht regulär.

(d) Wir zeigen, dass L_4 die Aussage des Pumping-Lemmas erfüllt für $n = 4$. Sei $w \in L_4$ mit $|w| > 4$. Die Idee ist, ein Teilwort in w zu finden, das gerade viele as und gerade viele bs enthält, sodass sich auch durch Pumpen dieses Teilworts die Parität der as und bs nicht verändert. Dazu betrachten wir die ersten vier Zeichen in w.

Fall 1: In den ersten vier Zeichen ist das Teilwort aa enthalten.

Dann können wir eine Darstellung $w = uvx$ wählen mit $|uv| \leq 4$ und $v = \mathsf{aa}$. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist $|uv^ix|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{a} + 2 \cdot (i - 1)$, was gerade ist, da $|w|_\mathsf{a}$ gerade ist. An der Anzahl der bs ändert sich nichts, also gilt $uv^ix \in L_4$.

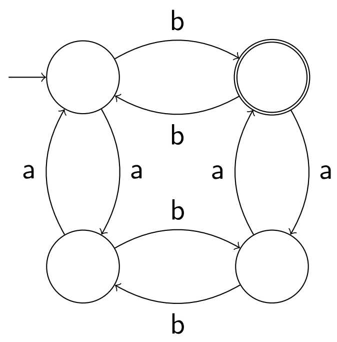
Fall 2: In den ersten vier Zeichen ist das Teilwort bb enthalten.

Dieser Fall funktioniert analog zu Fall 1, auch hier ändert sich durch das Pumpen von bb die Parität nicht.

Fall 3: In den ersten vier Zeichen ist weder das Teilwort aa noch das Teilwort bb enthalten.

Dann müssen die ersten vier Zeichen abab oder baba sein, sonst würde Fall 1 oder Fall 2 eintreten. Dann können wir eine Darstellung $w = uvx$ wählen mit $|uv| \leq 4$ und $v = \mathsf{abab}$ (bzw. $v = \mathsf{baba}$). Dann ist $|uv^ix|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{a} + 2 \cdot (i-1)$, was gerade ist, da $|w|_\mathsf{a}$ gerade ist. Analog ist $|uv^ix|_\mathsf{b} = |w|_\mathsf{b} + 2 \cdot (i-1)$, was ungerade ist, da $|w|_\mathsf{b}$ ungerade ist. Also gilt auch hier $uv^ix \in L_4$.

Die Sprache L_4 ist regulär, da der folgende DEA L_4 akzeptiert:



Aufgabe 5 (1 + 2 = 3 Punkte)

Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definieren wir die Sprache $L_f = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j\mathsf{2}^{f(i,j)} \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

(a) Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, sodass L_f regulär ist. Beweisen Sie!

(b) Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, sodass L_f nicht regulär ist. Beweisen Sie!

Lösung:

(a) Betrachte zum Beispiel die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(i,j) = 0$ für alle $i,j \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$L_f = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j\mathsf{2}^{f(i,j)} \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j\mathsf{2}^0 \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Dann gilt für den regulären Ausdruck $\alpha = \mathsf{0}^*\mathsf{1}^*$, dass $L(\alpha) = L_f$, und somit ist die Sprache regulär.

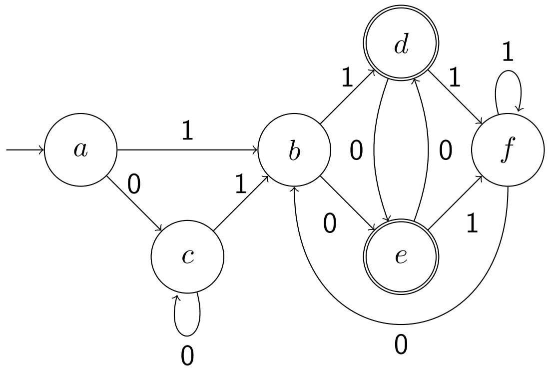
(b) Betrachte zum Beispiel die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(i,j) = i + j$ für alle $i,j \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$L_f = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j\mathsf{2}^{f(i,j)} \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \mathsf{0}^i\mathsf{1}^j\mathsf{2}^{i+j} \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Wir zeigen, dass die Sprache L_f die Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir wählen $w = \mathsf{0}^n\mathsf{1}^n\mathsf{2}^{2n}$. Offensichtlich gilt $w \in L_f$ mit $|w| > n$. Betrachte eine beliebige Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Dann gilt $u = \mathsf{0}^p$, $v = \mathsf{0}^q$ für Zahlen p, q mit $p + q \leq n, q > 0$. Das Wort $uv^2x = \mathsf{0}^{n+q}\mathsf{1}^n\mathsf{2}^{2n}$ liegt nicht in L_f, da $f(n+q, n) = (n+q) + n = 2n + q \neq 2n$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort in L_f der Länge größer als n, für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert. Somit ist L_f nicht regulär.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

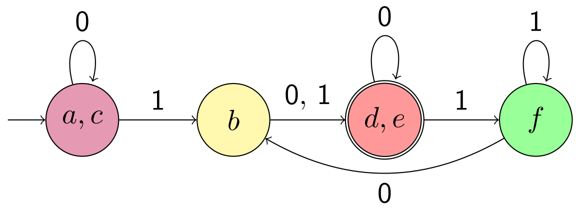
Konstruieren Sie zu folgendem Automaten den zugehörigen Äquivalenzklassenautomat. Geben Sie in jedem Schritt alle Äquivalenzklassen an und durch welche Zeugen sie getrennt werden. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Äquivalenzklassenautomaten.



Lösung:

Zeuge	Äquivalenzklassen
ε	$\{a,b,c,f\}$, $\{d,e\}$
0	$\{a,c,f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
1	$\{a,c,f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
00	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
01	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
10	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
11	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
000	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
001	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
010	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
011	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
100	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
101	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
110	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$
111	$\{a,c\}$, $\{f\}$, $\{b\}$, $\{d,e\}$

Somit trennen die Wörter der Länge 3 keine weiteren Äquivalenzklassen und das Verfahren terminiert.



Aufgabe 7 (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben seien drei reguläre Sprachen A, B, C_0 über einem endlichen Alphabet Σ. Weiterhin sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Sprache C_i über dem Alphabet Σ definiert als:

$$C_i = AC_{i-1}B.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ist die Sprache C_i regulär.

(b) Die Sprache

$$C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} C_i$$

ist regulär.

Lösung:

(a) Die Aussage stimmt. Wir beweisen es mittels Induktion über $i \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang $i = 0$: Die Sprache C_0 ist nach Voraussetzung regulär, also stimmt die Behauptung.

Induktionsschritt $i \curvearrowright i+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein $i \in \mathbb{N}_0$, also ist C_i regulär. Da reguläre Sprachen unter Konkatenationsbildung abgeschlossen sind, ist $C_{i+1} = AC_iB$ als Konkatenation von drei regulären Sprachen ebenfalls regulär. Also gilt die Aussage auch für $i+1$.

Nach Induktion gilt dann die Aussage für jedes $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die Aussage stimmt nicht. Betrachte zum Beispiel das Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und die Sprachen $A = \{\mathtt{0}\}$, $B = \{\mathtt{1}\}$ und $C_0 = \{\varepsilon\}$. Alle drei Sprachen sind endlich und somit regulär und erfüllen somit die Voraussetzung. Wir zeigen zuerst mittels Induktion über i, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$C_i = \left\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^i\right\}$$

Induktionsanfang $i = 0$: Es gilt

$$\{\mathtt{0}^0\mathtt{1}^0\} = \{\varepsilon\varepsilon\} = \{\varepsilon\} = C_0,$$

also stimmt die Behauptung.

Induktionsschritt $i \curvearrowright i+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein $i \in \mathbb{N}_0$, also gilt $C_i = \{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^i\}$. Dann:

$$\begin{aligned} C_{i+1} &= AC_iB \\ &= \{\mathtt{0}\} \cdot \left\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^i\right\} \cdot \{\mathtt{1}\} \\ &= \left\{\mathtt{0}^{i+1}\mathtt{1}^{i+1}\right\} \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung auch für $i+1$.

Nach Induktion gilt es dann für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Insgesamt gilt

$$C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} C_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \left\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^i\right\} = \left\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Somit ist C laut der Vorlesung nicht regulär.

Aufgabe 8 (1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Betrachten Sie die Sprachen

$$A(L) = \{w \in L \mid \text{es gibt kein echtes Präfix } w' \text{ von } w \text{ mit } w' \in L\}$$

und

$$B(L) = \{w \in L \mid \text{für alle Wörter } w' \in L \text{ ist } w \text{ kein echtes Präfix von } w'\}$$

.

(a) Bestimmen Sie $A(L_1)$ für $L_1 = \{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathsf{ba}\}$. Begründen Sie!

(b) Zeigen Sie, dass $A(L)$ regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B(L)$ regulär ist.

Lösung:

(a) Es ist $A(L_1) = L(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^+\mathsf{a})$. Ein Wort $w \in A(L_1)$ darf das Teilwort ba nur einmal enthalten und ba muss am Ende des Wortes stehen, da es sonst auch ein Präfix von w gäbe, das ba enthält.

(b) Da L regulär ist, gibt es einen DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L akzeptiert. Wir konstruieren einen DEA $\mathcal{A}_A = (Q \cup \{q_A\}, \Sigma, \delta_A, s, F)$ wobei $q_A \notin Q$ ein neuer Zustand ist und δ_A wie folgt definiert ist:

$$\delta_A(q, x) = \begin{cases} q_A & \text{falls } q \in F \cup \{q_A\} \\ \delta(q, x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte ein beliebiges Wort $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$. Dann gilt:

- Falls $w_1 \dots w_k \in L$ für ein $k < n$ gilt, also

  $$\delta^*(s, w_1 \dots w_k) \in F,$$

  dann gilt nach Konstruktion:

  $$\delta_A^*(s, w) = q_A \notin F. \tag{1}$$

- Falls $w_1 \dots w_k \notin L$ für alle $k < n$ gilt, dann gilt:

  $$\delta_A^*(s, w) = \delta^*(s, w) \tag{2}$$

Wir wollen nun $A(L) = L(\mathcal{A}_A)$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst $A(L) \subseteq L(\mathcal{A}_A)$. Wir betrachten also den Fall $w \in A(L)$. Das heißt, es gilt $w \in L$, aber $w_1 \dots w_k \notin L$ für alle $k < n$. Dann gilt

$$\delta_A^*(s, w) \overset{(2)}{=} \delta^*(s, w) \overset{w \in L}{\in} F.$$

Also gilt $w \in L(\mathcal{A}_A)$ akzeptiert und somit (da $w \in A(L)$ beliebig war):

$$A(L) \subseteq L(\mathcal{A}_A).$$

Um $L(\mathcal{A}_A) \subseteq A(L)$ zu zeigen, betrachten wir den Fall $w \in L(\mathcal{A}_A)$. Also gilt

$$\delta_A^*(s, w) \in F.$$

Nach (1) gilt dann für alle $i < k$:

$$w_1 \dots w_k \notin L.$$

Und somit nach (2):

$$\delta_A (s, w) = \delta^*_A (s, w) \in F.$$

Das heißt, es gilt $w \in L$, aber kein echtes Präfix von w gehört zu L, also $w \in A(L)$ und (da $w \in L(\mathcal{A}_A)$ beliebig war)

$$L(\mathcal{A}_A) \subseteq A(L).$$

Damit gilt insgesamt $L(\mathcal{A}_A) = A(L)$ und somit ist $A(L)$ regulär.

(c) Da L regulär ist, gibt es einen DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L akzeptiert. Wir konstruieren einen DEA $\mathcal{A}_B = (Q, \Sigma, \delta, s, F_B)$ mit

$$F_B = \{f \in F \mid \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| > 0 : \delta^*(f, w) \notin F\}.$$

Es werden also nur solche Endzustände behalten, von denen aus man durch Lesen von weiteren Zeichen keinen Endzustand mehr erreichen kann.

Betrachte ein beliebiges Wort $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$. Analog zur vorigen Teilaufgabe zeigen wir zunächst $B(L) \subseteq L(\mathcal{A}_B)$. Sei also $w \in B(L)$. Das heißt, es gilt $w \in L$, aber es gibt kein $z \in \Sigma^*$ mit $|z| > 0$ und $wz \in L$. Da $w \in L$, gilt:

$$f := \delta^* (s, w) \in F.$$

Angenommen $f \notin F_B$. Dann existiert nach Definition von F_B ein $z \in \Sigma^*$ mit $|z| > 0$ und $\delta(f, z) \in F$. Dann gilt

$$\delta^* (s, wz) = \delta^* (\delta^* (s, w), z) = \delta^* (f, z) \in F,$$

also gilt $wz \in L$ mit $|z| > 0$, ein Widerspruch zur Definition von $B(L)$. Also gilt $f \in F_B$ und somit akzeptiert $\mathcal{A}_B$ das Wort w. Deswegen gilt $w \in L(\mathcal{A}_B)$ und (da $w \in B(L)$ beliebig war):

$$B(L) \subseteq L(\mathcal{A}_B).$$

Zeige nun $L(\mathcal{A}_B) \subseteq B(L)$. Sei dazu $w \in L(\mathcal{A}_B)$. Also gilt:

$$f := \delta^* (s, w) \in F_B \subseteq F.$$

Zum Einen folgt aus $f \in F$ direkt $w \in L$. Angenommen, w ist ein echtes Präfix von einem Wort $w' = wz \in L$ (mit $|z| > 0$). Also:

$$\delta^* \left(s, w'\right) = \delta^* (s, wz) = \delta^* (\delta^* (s, w), z) = \delta^*(f, z) \in F.$$

Wegen $\delta^* (f, z) \in F$, gilt nach Definition von F_B:

$$f \notin F_B,$$

ein Widerspruch. Also ist $w \in L$ kein echtes Präfix von einem Wort aus L und es gilt $w \in B(L)$. Da $w \in L(\mathcal{A}_B)$ beliebig war, gilt auch:

$$L(\mathcal{A}_B) \subseteq B(L).$$

Damit gilt insgesamt $L(\mathcal{A}_B) = B(L)$ und somit ist $B(L)$ regulär.