Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 1

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 21/22

Ausgabe: 21.10.2021
Abgabe: Freitag, 5.11.2021, 11:30 Uhr in Ilias

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben seien zwei Sprachen $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Dabei sei L_1 die Sprache der Wörter, die ab als Teilwort enthalten, und L_2 die Sprache der Wörter, die mit a enden. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an.

(a) $L_1 \cup L_2$

(b) $L_2 \cdot L_1$

(c) $L_1 \setminus L_2$

(d) L_2 / L_1

(e) L_1^c

Lösung:

(a) $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{ab}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^* \cup (\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{a} = (\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^* = \mathsf{b}^*\mathsf{a}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*$

(b) $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{ab}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*$

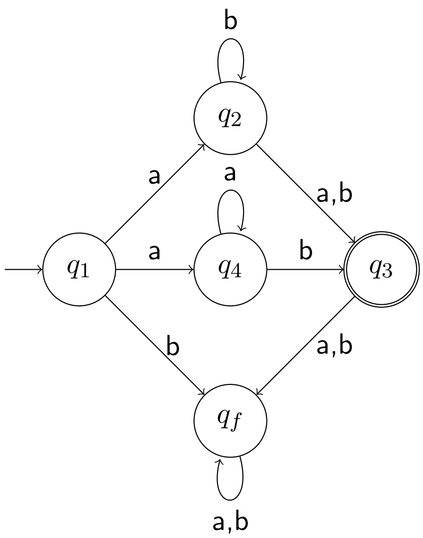
(c) $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{ab} \cup (\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{ab}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{b} = (\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*\mathsf{b}$

(d) $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b})^*$

(e) $\mathsf{b}^*\mathsf{a}^*$

Aufgabe 2 (1 + 3 = 4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Übergangsgraphen gegeben ist:



(a) Welche Sprache erkennt der Automat $\mathcal{A}$?

(b) Konstruieren Sie mithilfe der Potenzmengenkonstruktion den zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen Automaten $\mathcal{A}'$. Geben Sie außerdem den Übergangsgraphen von $\mathcal{A}'$ an. Bezeichnen Sie insbesondere die Zustände in $\mathcal{A}'$ mit den Teilmengen der Zustände in $\mathcal{A}$, die sie repräsentieren.

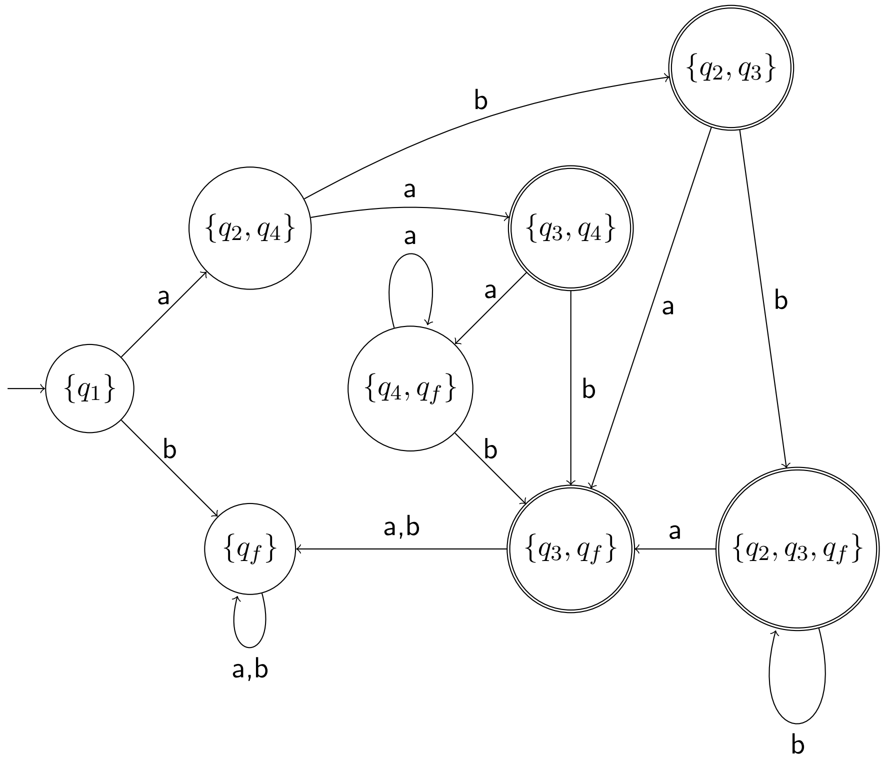
Lösung:

(a) $L(\mathcal{A}) = \mathsf{ab}^*(\mathsf{a} \cup \mathsf{b}) \cup \mathsf{aa}^*\mathsf{b}$

(b) Potenzmengenkonstruktion mit Startzustand $\{s\}$ (Endzustände sind unterstrichen):

Zustand	Übergänge	
	a	b
$\{q_1\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_f\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_f\}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\underline{\{q_3, q_4\}}$	$\{q_4, q_f\}$	$\{q_3, q_f\}$
$\underline{\{q_2, q_3\}}$	$\{q_3, q_f\}$	$\{q_2, q_3, q_f\}$
$\{q_4, q_f\}$	$\{q_4, q_f\}$	$\{q_3, q_f\}$
$\underline{\{q_3, q_f\}}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\underline{\{q_2, q_3, q_f\}}$	$\{q_3, q_f\}$	$\{q_2, q_3, q_f\}$

Zustandsgraph von $\mathcal{A}'$:



Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Zwei reguläre Ausdrücke sind gleich, wenn sie die gleiche Sprache beschreiben. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Gleichungen für die regulären Ausdrücke X, Y, Z.

(a) $(XY)^* = (YX)^*$

(b) $(X \cup Y)Z = XZ \cup YZ$

(c) $(X^*)^* = X^*$

Lösung:

Hinweis: Die Lösungen hier sind sehr ausführlich. Die kleinen Schritte sollen beim Verständnis helfen, sind aber nicht notwendig, um die volle Punktzahl zu erhalten.

(a) Die Gleichung ist falsch. Beweis durch Gegenbeispiel: $X = \mathsf{x}, Y = \mathsf{y}$. Dann gilt:

$$(XY)^* = (\mathsf{xy})^*, (YX)^* = (\mathsf{yx})^*$$

Deswegen gilt zum Beispiel $\mathsf{xy} \in L((XY)^*)$, aber $\mathsf{xy} \notin L((YX)^*)$.

(b) Die Gleichung ist richtig.

$$
\begin{aligned}
& w \in L((X \cup Y)Z) \\
\Leftrightarrow & \exists u \in L(X \cup Y), v \in L(Z) : w = uv \\
\Leftrightarrow & \exists u \in L(X) \cup L(Y), v \in L(Z) : w = uv \\
\Leftrightarrow & (\exists u \in L(X), v \in L(Z) : w = uv) \vee (\exists u \in L(Y), v \in L(Z) : w = uv) \\
\Leftrightarrow & w \in L(XZ) \vee w \in L(YZ) \\
\Leftrightarrow & w \in L(XZ) \cup L(YZ) \\
\Leftrightarrow & w \in L(XZ \cup YZ)
\end{aligned}
$$

(c) Die Gleichung ist richtig.

- $L(X^*) \subseteq L((X^*)^*)$:

$$
\begin{aligned}
& w \in L(X^*) \\
\Rightarrow & \exists k \in \mathbb{N}, x \in L(X^*) : k = 1, x = w, w = x^k \\
\Rightarrow & w \in L((X^*)^*)
\end{aligned}
$$

- $L((X^*)^*) \subseteq L(X^*)$:

$$
\begin{aligned}
& w \in L((X^*)^*) \\
\Rightarrow & \exists k \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_k \in L(X^*) : w = x_1 \ldots x_k \\
\Rightarrow & \exists k, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}, v_{1,1}, \ldots, v_{1,j_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,j_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,j_k} \in L(X), x_1, \ldots, x_k \in L(X^*) : \\
& x_1 = v_{1,1} \ldots v_{1,j_1}, x_2 = v_{2,1} \ldots v_{2,j_2}, \ldots, x_k = v_{1,k} \ldots v_{1,j_k}, w = x_1 x_2 \ldots x_k \\
\Rightarrow & \exists k, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}, v_{1,1}, \ldots, v_{1,j_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,j_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,j_k} \in L(X) : \\
& w = v_{1,1} \ldots v_{1,j_1} v_{2,1} \ldots v_{2,j_2} \ldots v_{1,k} \ldots v_{1,j_k} \\
\Rightarrow & w \in L(X^*)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

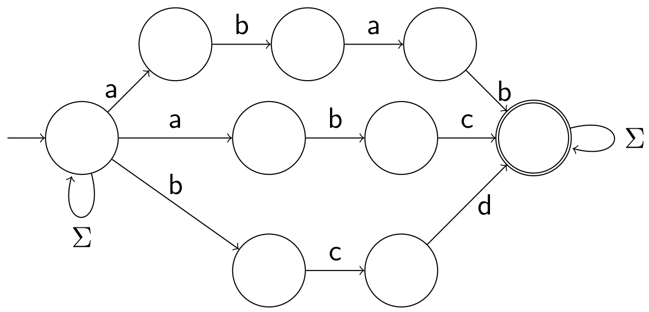
Geben Sie jeweils einen endlichen Automaten an, der die folgende Sprache akzeptiert. Für alle Teilaufgaben gilt $\Sigma = \{\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{d},\mathsf{e}\}$. Dabei bezeichne $n_{\mathsf{x}}(w)$, wie oft das Symbol x im Wort w vorkommt. Zum Beispiel $n_{\mathsf{a}}(\mathsf{aba}) = 2, n_{\mathsf{b}}(\mathsf{aba}) = 1$.

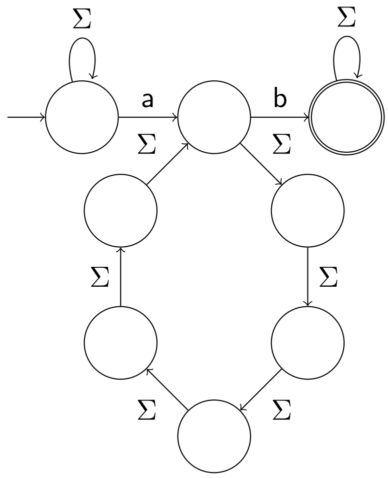
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } \mathsf{abab}, \text{ oder } \mathsf{abc}, \text{ oder } \mathsf{bcd} \text{ als Teilwort}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : w \text{ enthält Teilwort } \mathsf{a}v\mathsf{b} \text{ und } |v| \mod 6 = 0\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid (n_{\mathsf{a}}(w) \mod 2021) + (n_{\mathsf{b}}(w) \mod 42) = (n_{\mathsf{c}}(w) \mod 2022)\}$.
Hinweis: die graphische Darstellung eines Automaten ist dafür schlecht geeignet.

Lösung:

(a) 

(b) 

(c) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q = \{0, 1, \ldots, 2020\} \times \{0, 1, \ldots, 41\} \times \{0, 1, \ldots, 2021\}$
- Die Übergangsfunktion δ ist definiert durch: $\forall (q_1, q_2, q_3) \in Q$:
  $\delta((q_1, q_2, q_3), a) = ((q_1 + 1) \mod 2021, q_2, q_3)$,
  $\delta((q_1, q_2, q_3), b) = (q_1, (q_2 + 1) \mod 42, q_3)$,
  $\delta((q_1, q_2, q_3), c) = (q_1, q_2, (q_3 + 1) \mod 2022)$,
  $\delta((q_1, q_2, q_3), d) = \delta((q_1, q_2, q_3), e) = (q_1, q_2, q_3)$
- $s = (0, 0, 0)$
- $F = \{(q_1, q_2, q_3) \mid q_1 + q_2 = q_3\}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Gegeben seien $x, y \in \mathbb{N}$. Geben Sie jeweils ein Alphabet Σ und zwei Sprachen A, B über Σ an, sodass die jeweiligen Bedingungen erfüllt sind. Beweisen Sie die Korrektheit!

(a) $|A| = x, |AB| = x + 1$

(b) $|A| = x, |AB| = x + y$

(c) $|A| = x, |B| = y, |AB| = xy$

Lösung:

(a) Seien $\Sigma = \{\mathsf{a}\}, A = \{a^i \mid i \in \{1, \dots, x\}\}, B = \{\varepsilon, \mathsf{a}\}$. Dann gilt $|A| = x$ und:

$$\begin{aligned} AB &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in A, w_2 \in B\} \\ &= \{\mathsf{a}^i\varepsilon \mid i \in \{1, \dots, x\}\} \cup \{\mathsf{a}^i\mathsf{a} \mid i \in \{1, \dots, x\}\} \\ &= \{\mathsf{a}^i \mid i \in \{1, \dots, x\}\} \cup \{\mathsf{a}^i \mid i \in \{2, \dots, x+1\}\} \\ &= \{\mathsf{a}^i \mid \{1, \dots, x+1\}\}. \end{aligned}$$

Also gilt $|AB| = x + 1$.

(b) Seien $\Sigma = \{\mathsf{a}\}, A = \{\mathsf{a}^i \mid i \in \{1, \dots, x\}\}, B = \{\mathsf{a}^i \mid i \in \{0, \dots, y\}\}$. Dann gilt $|A| = x$ und:

$$\begin{aligned} AB &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in A, w_2 \in B\} \\ &= \{\mathsf{a}^i\mathsf{a}^j \mid i \in \{1, \dots, x\}, j \in \{0, \dots, y\}\} \\ &= \{\mathsf{a}^k \mid k \in \{1, \dots, x+y\}\} \end{aligned}$$

Also gilt $|AB| = x + y$.

(c) Seien $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, A = \{\mathsf{a}^i \mid i \in \{1, \dots, x\}\}, B = \{\mathsf{b}^i \mid i \in \{1, \dots, y\}\}$. Dann gilt $|A| = x$, $|B| = y$ und:

$$\begin{aligned} AB &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in A, w_2 \in B\} \\ &= \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^j \mid i \in \{1, \dots, x\}, j \in \{1, \dots, y\}\} \end{aligned}$$

Also gilt $|AB| = xy$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Gegeben seien zwei Grammatiken $G_i = (\Sigma, V, S, R_i), i = 1, 2$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}, V = \{S, A, B, C\}$ und folgenden Produktionsregeln

(a) $R_1 = \{S \to ABC, A \to \mathsf{a}A\mathsf{aa} \mid \mathsf{a}, B \to \mathsf{bb} \mid \mathsf{b}B\mathsf{b}, C \to \mathsf{ccc}C \mid \mathsf{cd}\}$

(b) $R_2 = \{S \to ABC, A \to \mathsf{a}A\mathsf{aa} \mid \mathsf{a}, B \to \mathsf{bb} \mid \mathsf{b}B\mathsf{b}, C \to \mathsf{cc}C\mathsf{c} \mid \mathsf{cd}\}$

Ist $L(G_i)$ eine reguläre Sprache? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck an. Wenn nicht, begründen Sie dies *kurz* und geben Sie die Sprache in Mengenschreibweise an.

Lösung:

(a) Ja, die Sprache ist regulär: $(\mathsf{aaa})^*\mathsf{abb}(\mathsf{bb})^*(\mathsf{ccc})^*\mathsf{cd}$

(b) $L(R_2) = \{\mathsf{a}^{3i+1}\mathsf{b}^{2j}\mathsf{c}^{2k}\mathsf{cdc}^k \mid i, k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}\}$. Die Sprache ist nicht regulär, da die DEAs nicht zählen können.

Anmerkung: Später in der Vorlesung werden wir lernen, formal zu beweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist. Danach reichen informelle Begründungen wie "DEAs können nicht zählen" nicht mehr aus.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: es existiert eine Sprache L mit $(L^c)^* = (L^*)^c$.

Lösung:
Behauptung: es gibt keine solche Sprache.
Sei L eine beliebige Sprache. Für jede Sprache A gilt: $\varepsilon \in A^*$, deswegen:

- Mit $A = L^c$ erhalten wir $\varepsilon \in (L^c)^*$.
- Mit $A = L$ erhalten wir $\varepsilon \in L^*$. Also gilt: $\varepsilon \notin (L^*)^c$.

Deswegen sind die Sprachen $(L^c)^*$ und $(L^*)^c$ nie gleich.