Praktikum Routenplanung

Vorbesprechung, Wintersemester 2021/2022

Lars Gottesbüren, Tim Zeitz, Adrian Feilhauer | 20. Oktober 2021

Organisatorisches

Karlsruher Institut für Technologie

Praktikum

- Erste Phase: 1 Übungsblatt mit 4 Aufgaben lösen
- Zweite Phase: Große Aufgabe in Gruppen à 3 Studenten
- Betreuer: Lars Gottesbüren, Tim Zeitz, Adrian Feilhauer
- Email: {lars.gottesbueren, tim.zeitz, adrian.feilhauer}@kit.edu
- 6 LP/ECTS
- Bei Fragen einfach vorbei kommen

Homepage: `https://i11www.iti.kit.edu/teaching/winter2021/algorithmengineeringpraktikum/`

Organisatorisches

Voraussetzungen

- Ihr seid im Master Informatik, alle anderen bitte melden

Organisatorisches

Voraussetzungen

- Ihr seid im Master Informatik, alle anderen bitte melden
- Ihr habt Interesse an algorithmischen Fragestellungen
- Ihr mögt Algorithmen implementieren

Organisatorisches

Voraussetzungen

- Ihr seid im Master Informatik, alle anderen bitte melden
- Ihr habt Interesse an algorithmischen Fragestellungen
- Ihr mögt Algorithmen implementieren

Übersicht

- Übungsaufgabe
- Anfangsvortrag
- Gruppenaufgabe
- Abschlussvortrag
- Ausarbeitung

Organisatorisches

Voraussetzungen

- Ihr seid im Master Informatik, alle anderen bitte melden
- Ihr habt Interesse an algorithmischen Fragestellungen
- Ihr mögt Algorithmen implementieren

Übersicht

- Übungsaufgabe
- Anfangsvortrag
- Gruppenaufgabe
- Abschlussvortrag
- Ausarbeitung

Implementierung

- C++
- oder Rust

Organisatorisches

Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt

- Es werden Punkte vergeben
  - Punkte gehen nicht in die Endnote ein
  - 2,5 Mio. Punkte müssen erreicht werden um zu bestehen

- Gruppen nach Punktzahl gebildet
- Gruppe mit den meisten Punkten darf sich Gruppenarbeitsthema zuerst aussuchen

- Nach Übungsblatt: formale Prüfungsanmeldung
  d.h. ab da: nichts gemacht → durchgefallen

- Gruppenarbeit ist schwerer als Übungsblatt

Benotung Übungsblätter

- Pro Aufgabe: Liste an Start- und Zielknotenpaaren
- Ihr soll die Pfadlänge berechnen
- Punkte einer Aufgabe = #Korrekt berechnete Pfadlängen

Bestehen

Es müssen 2,5 Mio. Punkte erreicht werden um zu bestehen!

Hilfestellung Übungsblätter

- Bei Fragen oder Problemen könnt ihr euch gerne an uns wenden
- Falls danach gefragt wird, dann können wir auch gerne Feedback zu eurem Code geben

Hilfestellung Übungsblätter

- Bei Fragen oder Problemen könnt ihr euch gerne an uns wenden
- Falls danach gefragt wird, dann können wir auch gerne Feedback zu eurem Code geben

- Allerdings: Eigeninitiative erwünscht
- Es ist eure Aufgabe bei Problemen auf einen der Betreuer zuzugehen
- Wer nicht fragt, der kriegt keine Hilfe

Organisatorisches

Karlsruher Institut für Technologie

Gruppenarbeit

- Bearbeitung in 3er-Gruppe
- Aufgabe:
  - Reimplementieren eines Forschungspapers
    - Nicht jede Gruppe hat das selbe Paper
- Visualisierung der Ergebnisse
- Einige Experimente aus dem Paper wiederholen
- Einige neue Experimente entwerfen und durchführen

Einteilung und Themen

- Gruppeneinteilung nach Übungsblatt
- Themenvorstellung bei Gruppeneinteilung

Organisatorisches

Karlsruher Institut für Technologie

Anfangsvortrag

- 10 min
- Problemstellung und den Kernansatz erklären

Ausarbeitung

- Alles, was ihr implementiert habt, in eigenen Worten beschreiben
- Experimente und Ergebnisse dokumentieren

Abschlussvortrag

- 20min–30min
- Inhalte der Ausarbeitung vorstellen

Aufwand

Karlsruher Institut für Technologie

Aufwand

- 6 ECTS/LP
- 6*30h = 180h
- Bei 20 Wochen: 9h pro Woche,
  also leicht mehr als 1 Tag Vollzeit pro Woche

Grobe Verteilung

- 35h Übungsblatt
- 95h Gruppenaufgabe, inklusive
  - Einarbeitung ins Thema
  - Implementierung
- 5h Kurzvortrag
- 20h Abschlussvortrag
- 20h Ausarbeitung
- 5h Anwesenheit

Zeitplan

Wann?	Wo?	Was?
Heute 20.10. um 14:00	SR -120	Vorbesprechung
16.11. 23:59	—	Abgabe Übungsblatt
17.11.	—	Punktevergabe per E-Mail
17.11. um 14:00	SR -120	Themen & Gruppeneinteilung
1.12. um 14:00	SR -120	Anfangsvorträge
17.–21.1.	—	Zwischentreffen
2.3.	—	Abgabe Ausarbeitung
16.3. um 14:00	SR -120	Abschlussvorträge

Es gilt Anwesenheitspflicht. Wer nicht kommen kann muss sich mit Begründung abmelden.

Problemstellung

Gesucht:

- Finde die beste Verbindung in einem Transportnetzwerk

Idee:

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Pfad durch Graph entspricht Route
- klassisches Problem (Dijkstra)

Probleme:

- Transportnetzwerke sind groß
- Dijkstra zu langsam ($>$ 1 Sekunde)

Problemstellung

Gesucht:

- Finde die beste Verbindung in einem Transportnetzwerk

Idee:

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Pfad durch Graph entspricht Route
- klassisches Problem (Dijkstra)

Probleme:

- Transportnetzwerke sind groß
- Dijkstra zu langsam (> 1 Sekunde)

Beschleunigungstechniken

Beobachtungen:

- viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- manche Berechnungen scheinen unnötig

Idee:

- Zwei-Phasen-Algorithmus:
  - offline: berechne Zusatzinformation während Vorberechnung
  - online: beschleunige Berechnung mit diesen Zusatzinformationen
- drei Kriterien:
  - wenig Zusatzinformation
  - kurze Vorberechnung (im Bereich Stunden/Minuten)
  - hohe Beschleunigung

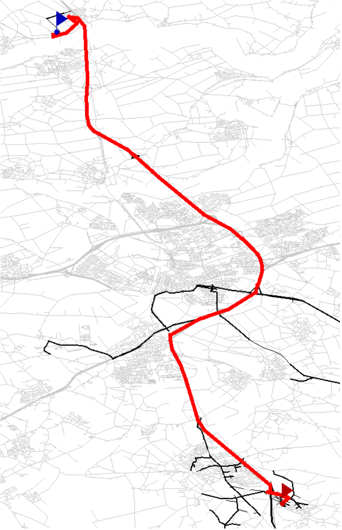
Beschleunigungstechniken

Beobachtungen:

- viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- manche Berechnungen scheinen unnötig

Idee:

- Zwei-Phasen-Algorithmus:
  - offline: berechne Zusatzinformation während Vorberechnung
  - online: beschleunige Berechnung mit diesen Zusatzinformationen
- drei Kriterien:
  - wenig Zusatzinformation
  - kurze Vorberechnung (im Bereich Stunden/Minuten)
  - hohe Beschleunigung

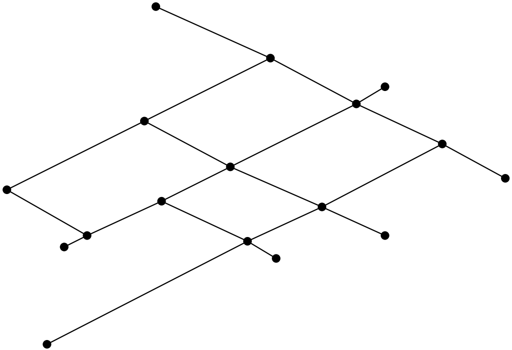


Modellierung (Straßengraphen)

Modellierung (Straßengraphen)

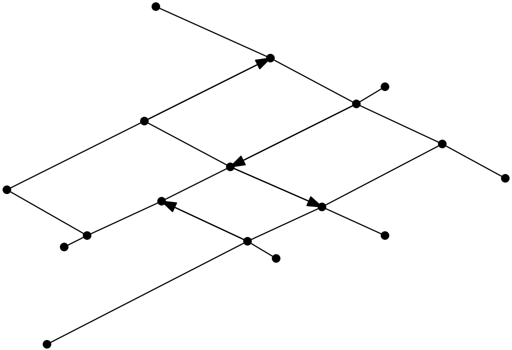
Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen



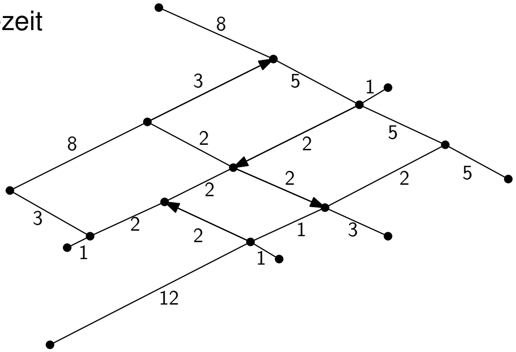
Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen

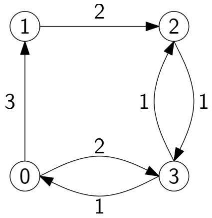


Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen
- Metrik ist Reisezeit



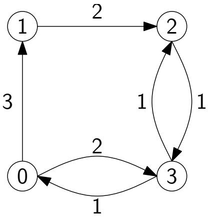
Graph-Repräsentationen



Graph-Repräsentationen

Drei klassische Ansätze:

- Adjazenzmatrix

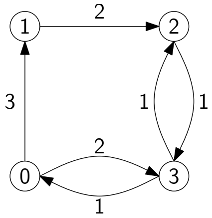


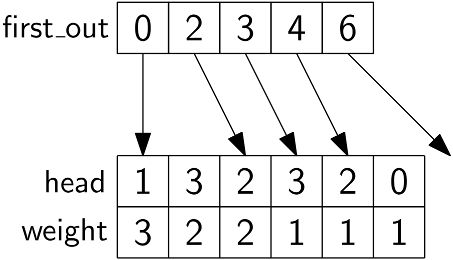
	0	1	2	3
0	–	3	–	2
1	–	–	2	–
2	–	–	–	1
3	1	–	1	–

Graph-Repräsentationen

Drei klassische Ansätze:

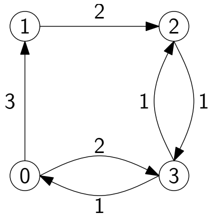
- (statisches) Adjazenzarray





Graph-Repräsentationen

Drei klassische Ansätze:



- Kantenarray

tail	1	0	3	0	2	3
head	2	1	2	3	3	0
weight	2	3	1	2	1	1

Was benutzen wir?

Adjazenzmatrix:

- Braucht $O(n^2)$ Speicher
- $n = 18 \cdot 10^6$
- Speicher $\geq 1/4$ Terabyte
- Impraktikabel

Was benutzen wir?

Adjazenzmatrix:

- Braucht $O(n^2)$ Speicher
- $n = 18 \cdot 10^6$
- Speicher $\geq 1/4$ Terabyte
- Impraktikabel

Kantenarray:

- Perfekt für einfache Transformationen (z.B. Graph umdrehen)
- Traversieren (d. h. Pfadsuche) geht nicht

Was benutzen wir?

Adjazenzmatrix:

- Braucht $O(n^2)$ Speicher
- $n = 18 \cdot 10^6$
- Speicher $\geq 1/4$ Terabyte
- Impraktikabel

Kantenarray:

- Perfekt für einfache Transformationen (z.B. Graph umdrehen)
- Traversieren (d. h. Pfadsuche) geht nicht

Adjazenzarray:

- Gut wenn man Pfade suchen will

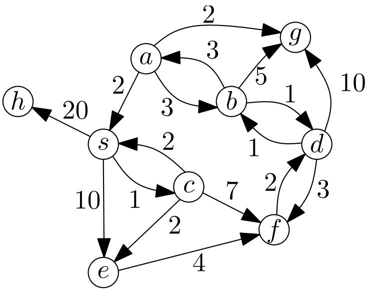
Konvertierung
Kantenarray → Adjazenzarray

- Nach tail sortieren
- Ausgangsgrad jedes Knotens berechnen
- first_out = Präfixsumme über Array der Ausgangsgrade

Dijkstras Algorithmus

```
forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞
d[s] = 0
q.clear()
q.insert(s, 0)
while !q.empty() do
    x ← q.pop()
    forall edges (x, y) ∈ E do
        if d[x] + len(x, y) < d[y] then
            d[y] ← d[x] + len(x, y)
            if y ∈ q then q.decreaseKey(y, d[y])
            else q.insert(y, d[y])
```

Dijkstras Algorithmus



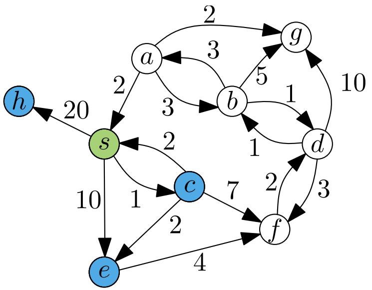
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	∞
b	∞
c	∞
d	∞
e	∞
f	∞
g	∞
h	∞

queue q:

ID	Key
s	0

Dijkstras Algorithmus



tentative distance d:

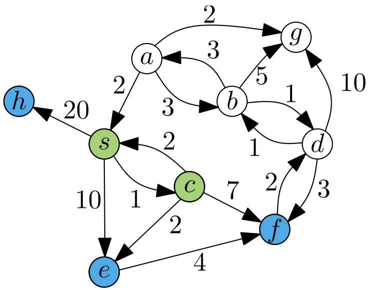
ID	Dist.
s	0
a	∞
b	∞
c	1
d	∞
e	10
f	∞
g	∞
h	20

queue q:

ID	Key
c	1
e	10
h	20

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dijkstras Algorithmus



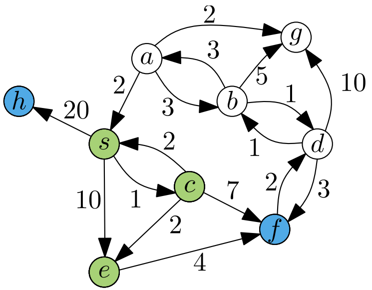
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	∞
b	∞
c	1
d	∞
e	3
f	8
g	∞
h	20

queue q:

ID	Key
e	3
f	8
h	20

Dijkstras Algorithmus



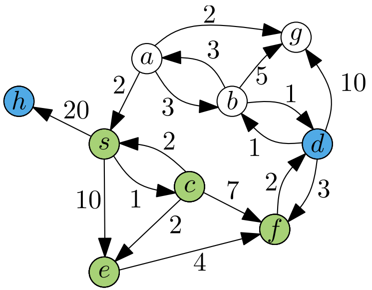
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	∞
b	∞
c	1
d	∞
e	3
f	7
g	∞
h	20

queue q:

ID	Key
f	7
h	20

Dijkstras Algorithmus



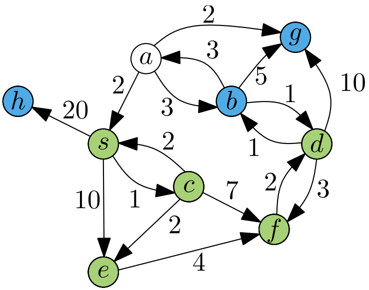
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	∞
b	∞
c	1
d	9
e	3
f	7
g	∞
h	20

queue q:

ID	Key
d	9
h	20

Dijkstras Algorithmus



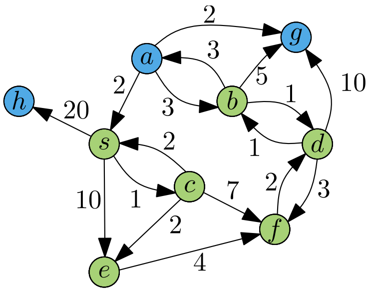
tentative distance *d*:

ID	Dist.
s	0
a	∞
b	10
c	1
d	9
e	3
f	7
g	19
h	20

queue *q*:

ID	Key
b	10
g	19
h	20

Dijkstras Algorithmus



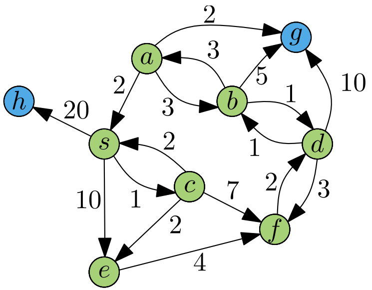
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	13
b	10
c	1
d	9
e	3
f	7
g	15
h	20

queue q:

ID	Key
a	13
g	15
h	20

Dijkstras Algorithmus



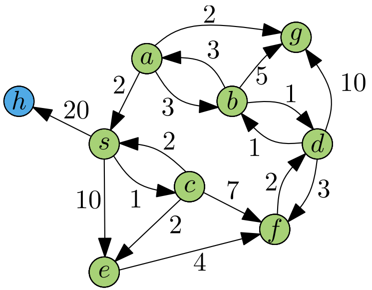
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	13
b	10
c	1
d	9
e	3
f	7
g	15
h	20

queue q:

ID	Key
g	15
h	20

Dijkstras Algorithmus



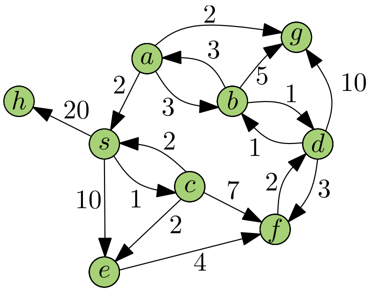
tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	13
b	10
c	1
d	9
e	3
f	7
g	15
h	20

queue q:

ID	Key
h	20

Dijkstras Algorithmus



tentative distance d:

ID	Dist.
s	0
a	13
b	10
c	1
d	9
e	3
f	7
g	15
h	20

queue q:

ID	Key

Dijkstras Algorithmus

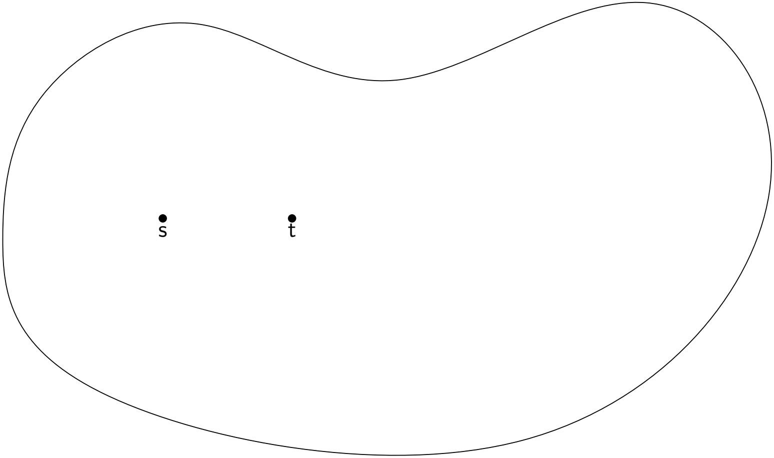
Resultat

- Nach der Ausführung gilt: $\forall v : d[v] = \mathrm{dist}_G(s, v)$

Stopkriterium

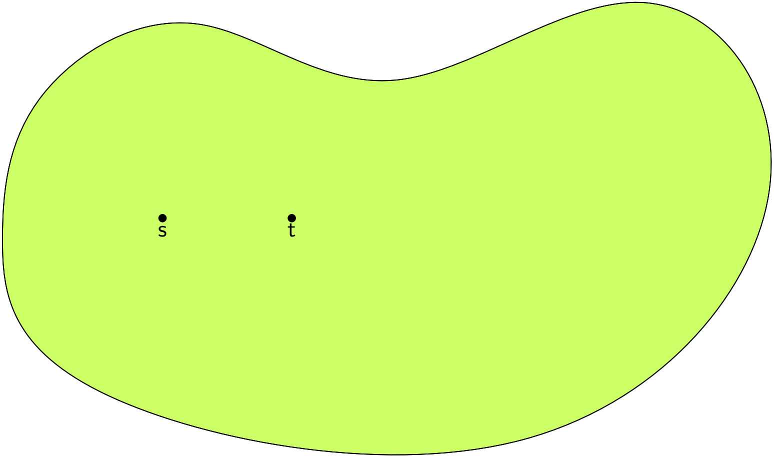
- Geht es schneller, wenn wir $\mathrm{dist}_G(s, t)$ nur für ein t bestimmen müssen?
- Ja: Breche Schleife ab, sobald t aus der Queue genommen wird

Schematischer Suchraum



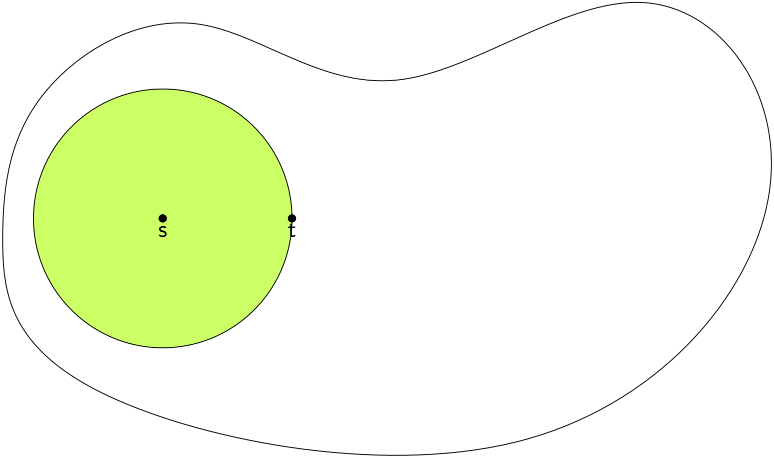
Ein Graph

Schematischer Suchraum



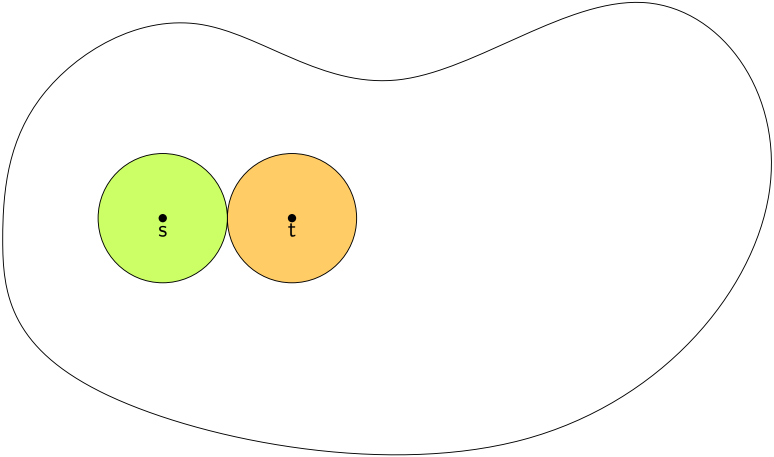
Suchraum ohne Stopkriterium

Schematischer Suchraum



Suchraum mit Stopkriterium

Schematischer Suchraum

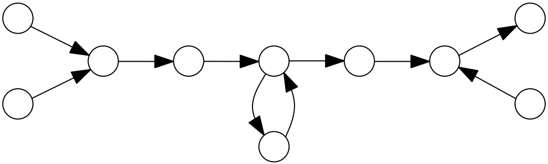


Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus

Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus

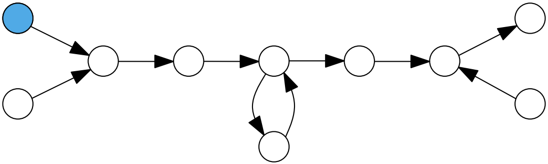
- Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus
- Mit zwei Queues und zwei tentativen Distanzarrays
- Arbeite die Seite mit den wenigsten Elementen in der Queue als nächstes ab
- Abbruch, wenn die Summe der min-keys beider Queues größer ist als der kürzeste bisher gefundene Pfad

Shortcut



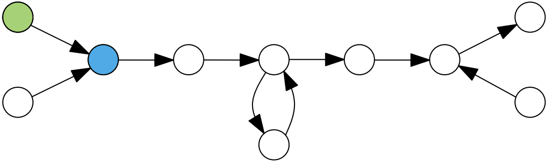
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



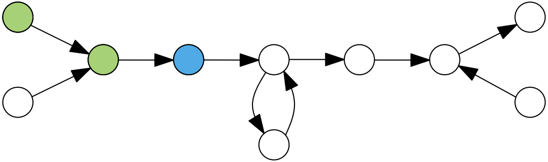
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



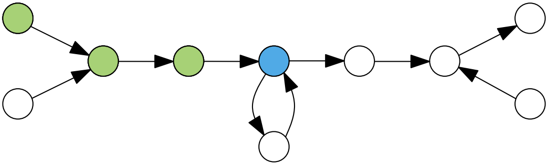
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



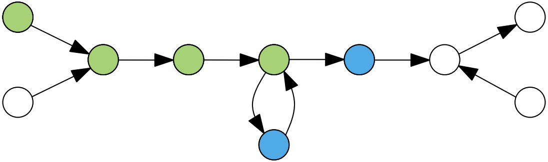
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



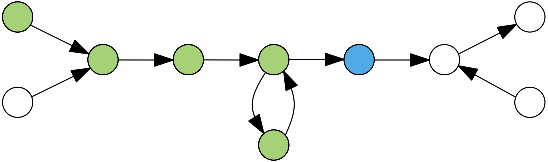
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



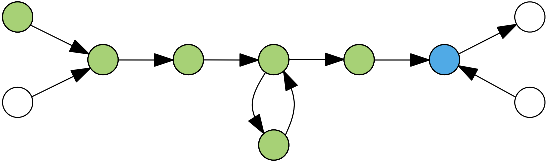
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



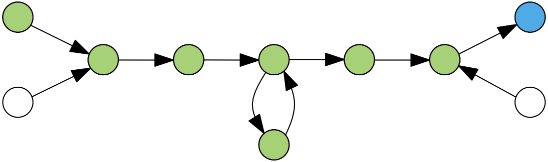
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



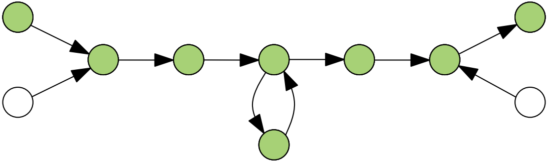
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



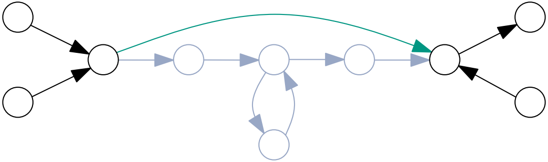
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

Shortcut



Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.

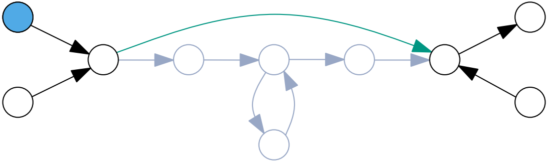
Shortcut



Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

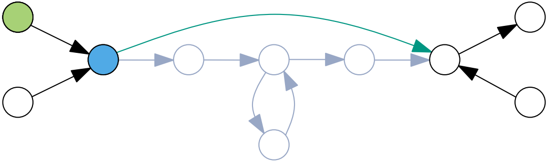
Shortcut

Karlsruher Institut für Technologie



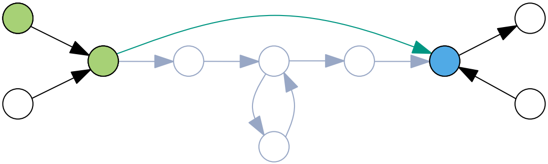
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

Shortcut



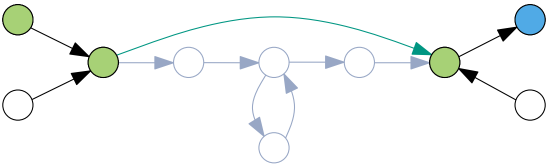
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

Shortcut



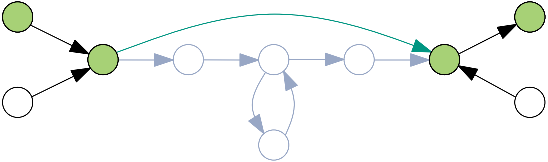
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

Shortcut



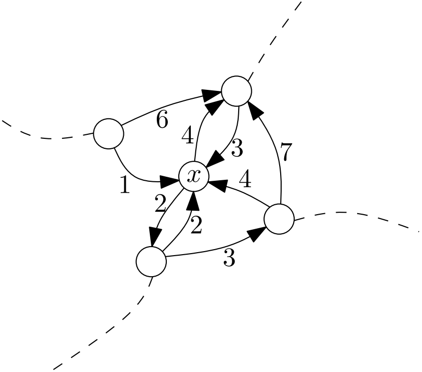
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

Shortcut



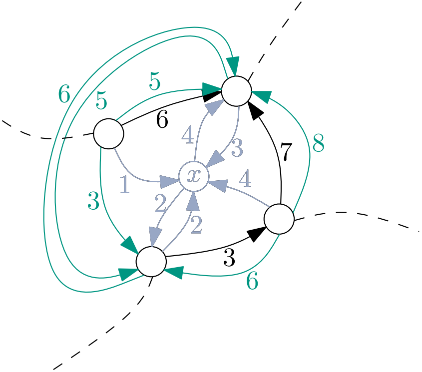
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn *s* oder *t* drin liegt.

Knotenkontraktion von *x*



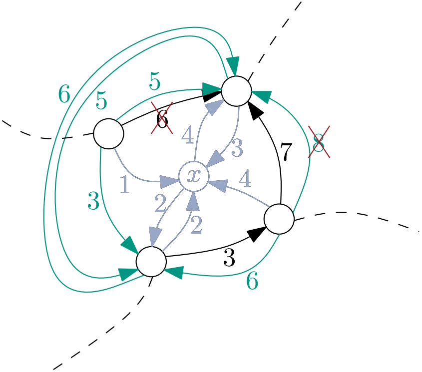
Kontraktion von *x*: Lösche *x* und füge Shortcuts zwischen Nachbarn ein,
um die Distanzen zwischen allen Knoten zu erhalten

Knotenkontraktion von *x*



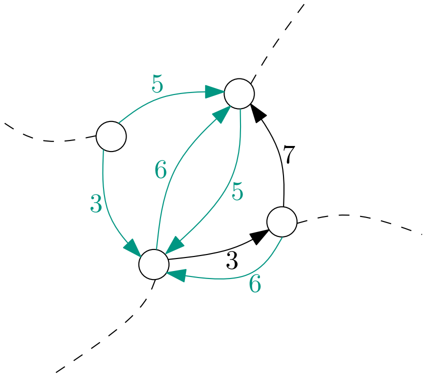
Kontraktion von *x*: Lösche *x* und füge Shortcuts zwischen Nachbarn ein, um die Distanzen zwischen allen Knoten zu erhalten

Knotenkontraktion von *x*

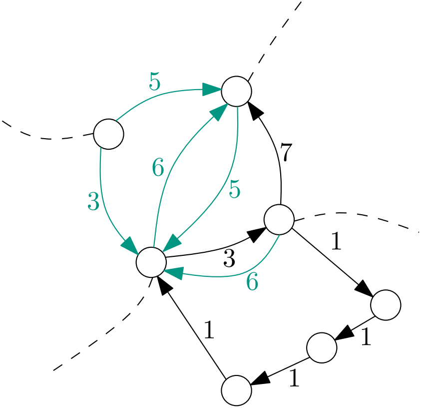


Bei Mehrfachkanten: Längere Kanten verwerfen

Knotenkontraktion von *x*



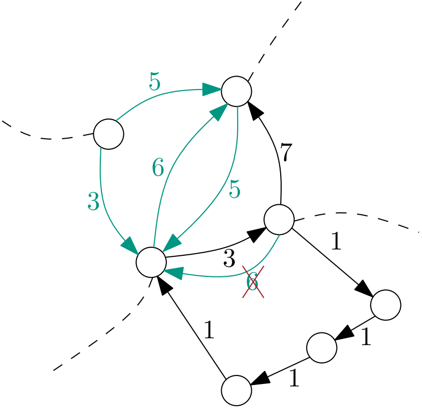
Knotenkontraktion von *x*



Falls es einen kürzeren Pfad durch den Restgraphen gibt, dann kann man einen Shortcut auch verwerfen.

Suche nach solchem Pfad heißt Zeugensuche/Witness Search

Knotenkontraktion von *x*



Falls es einen kürzeren Pfad durch den Restgraphen gibt, dann kann man einen Shortcut auch verwerfen.

Suche nach solchem Pfad heißt Zeugensuche/Witness Search

Zeugensuche

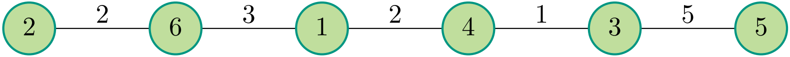
- Es seien y und z zwei Nachbarn des kontrahierten Knoten x
- Wir fügen einen Shortcut (y, z) mit Gewicht $\mathrm{len}(y, x) + \mathrm{len}(x, z)$ ein, wenn $y \to x \to z$ der einzige kürzeste y–z-Weg ist
- Zum Überprüfen, ob es einen kürzeren Weg gibt, startet man einen Dijkstra von y aus nach z. Diese Suche kann teuer sein. Mögliche Optimierungen:
  - Suche darf nicht über den Knoten x gehen
  - Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus
  - Wenn die Suchen sich treffen, kann man abbrechen
  - Wenn die Suchfront größer wird als $\mathrm{len}(y, x) + \mathrm{len}(x, z)$, kann man abbrechen
- Wenn das immer noch zu langsam ist: Suche nach k Schritten abbrechen. Eventuell gibt es einen Pfad, den wir nicht finden. Das führt zu zusätzlichen Shortcuts, aber das ist kein Problem bzgl. der Korrektheit.

Contraction Hierarchy

Grundidee

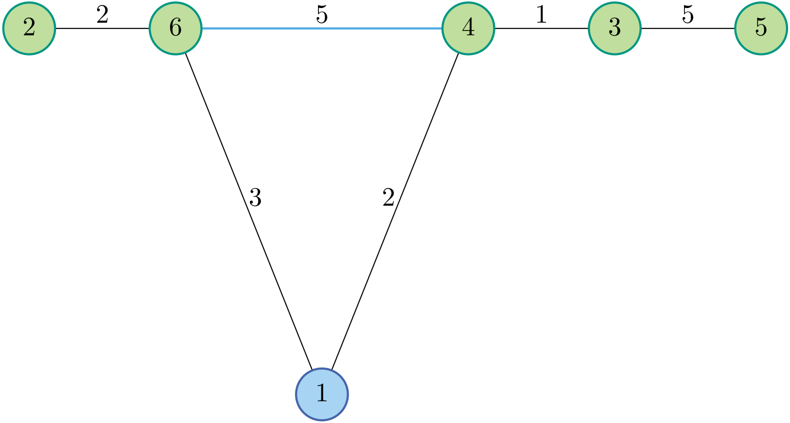
- Eingabegraph G
- Ordne Knoten von G nach "Wichtigkeit": $v_1 \dots v_n$
- Kontrahiere Knoten iterativ aus G heraus
  - zuerst den "unwichtigsten" Knoten v_1
  - den "wichtigsten" Knoten v_n als letztes
- Graph mit Shortcuts heißt augmentierter Graph

Contraction Hierarchy



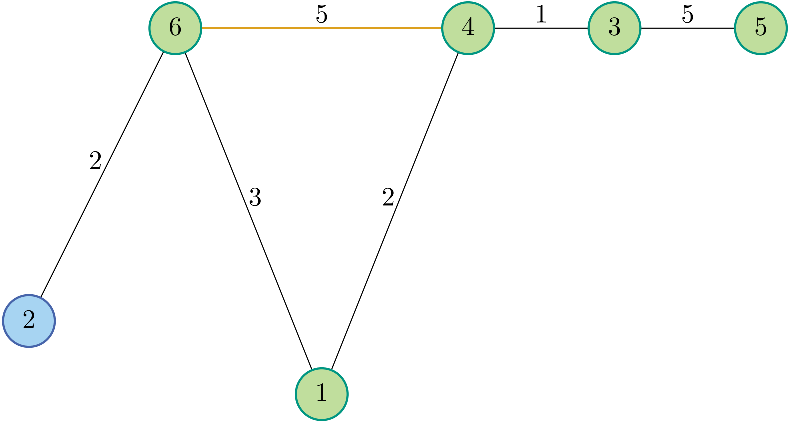
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



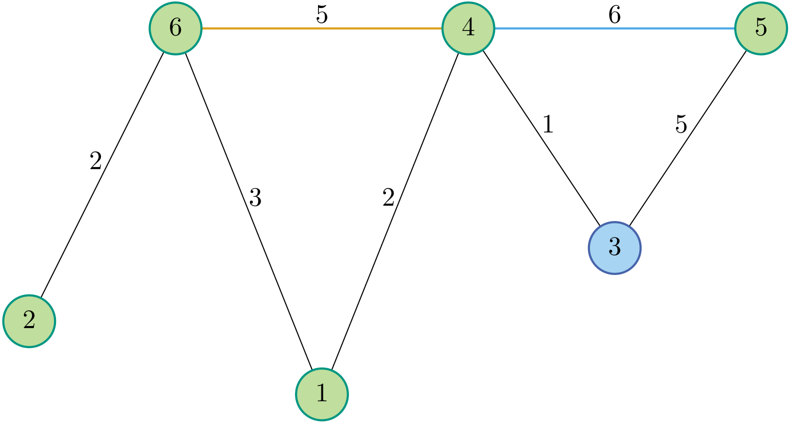
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



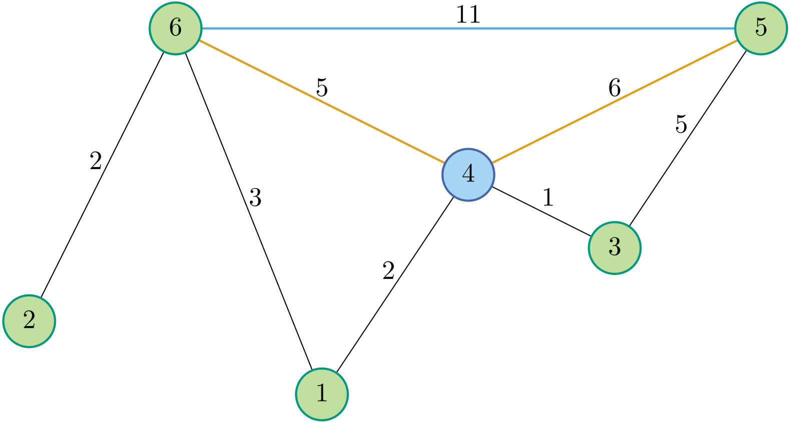
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



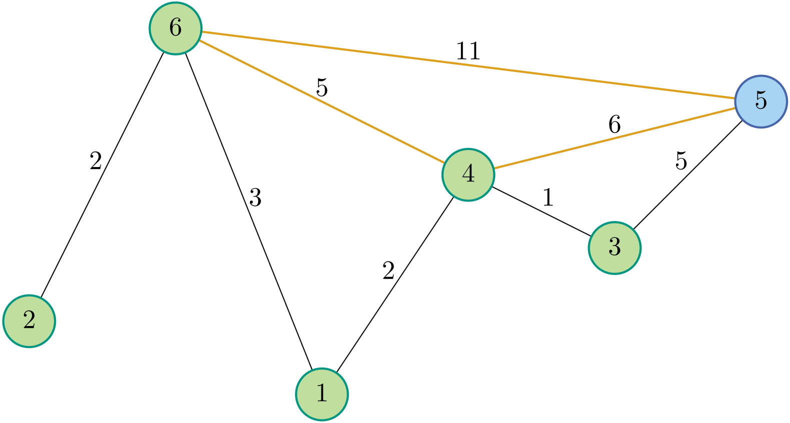
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



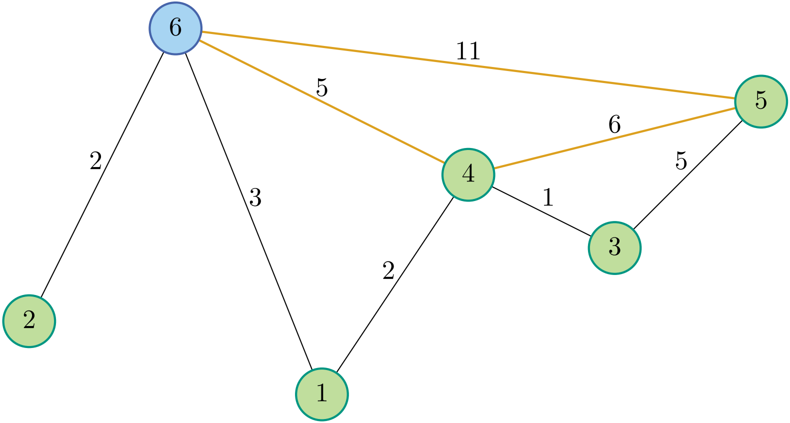
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



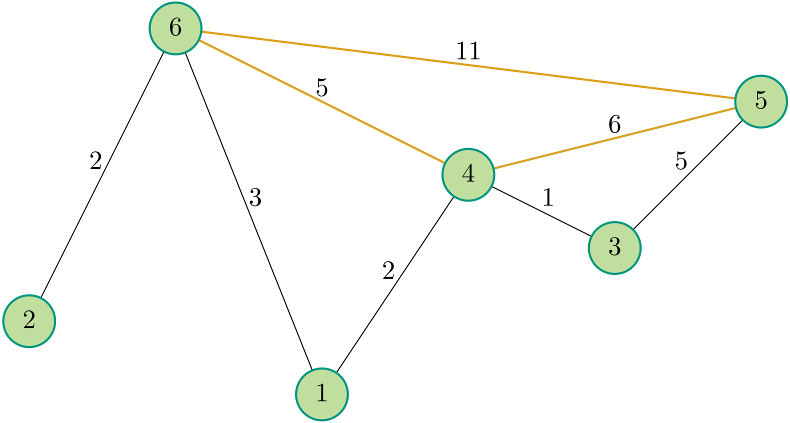
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



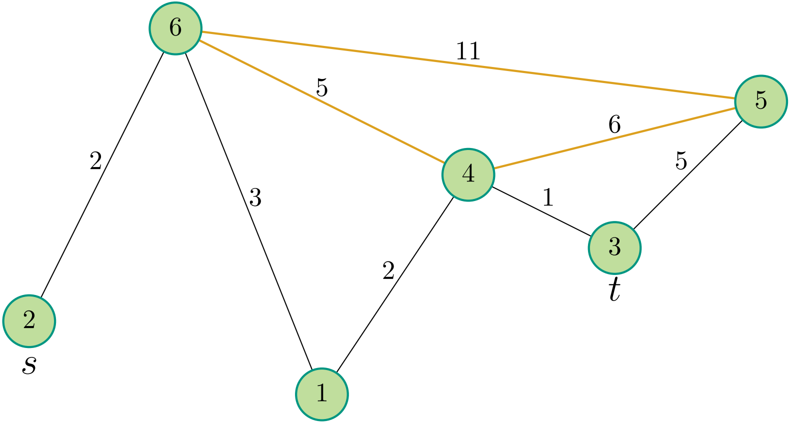
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



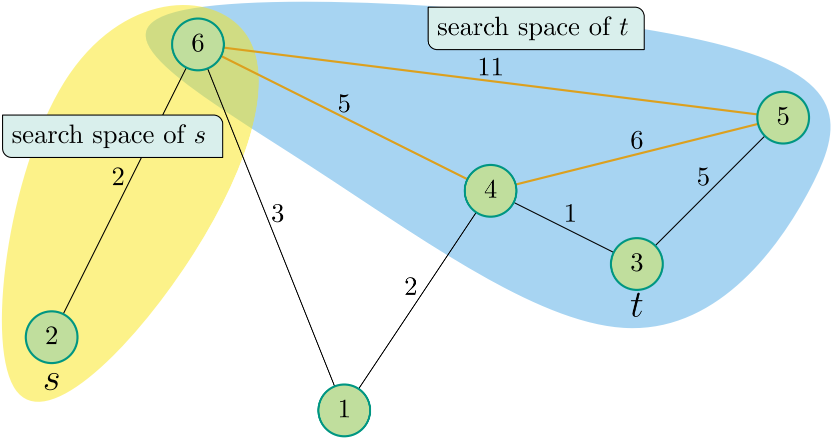
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



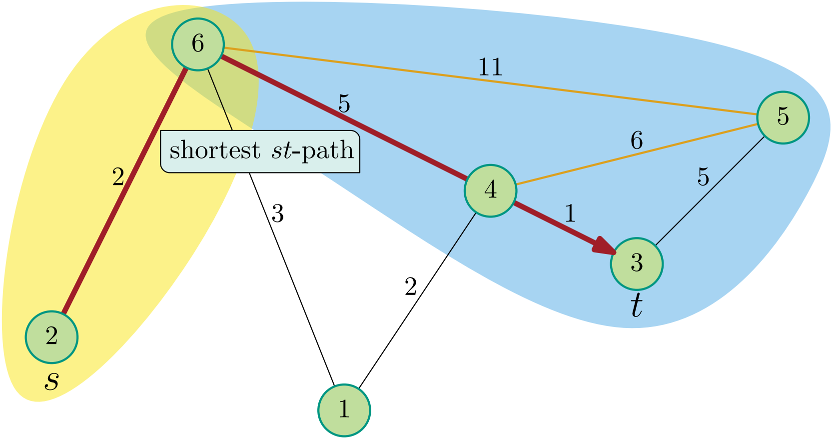
Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



Knoten nummeriert nach “Wichtigkeit”

Contraction Hierarchy



Für jeden ursprünglichen kürzesten Weg gibt es einen hoch-runter-Pfad

Anfrage

- Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus
- Verfolge nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- Vorwärtssuche findet den "hoch"-Teil des Pfads
- Rückwärtssuche findet den "runter"-Teil des Pfads
- Abbruch, wenn der min-key beider Queues größer ist als der bisher kürzeste gefundene Pfad

Nach “Wichtigkeit” Ordnen

Grund-Idee:

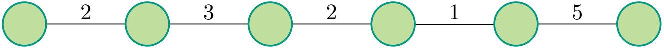
- Wir wollen wenig Shortcuts
- Ein Knoten ist “unwichtig”, wenn er wenig Shortcuts erzeugt
- → simuliere Knotenkontraktion, um Knoten zu gewichten

Algorithmus:

- Baue eine große Warteschlange mit allen Knoten sortiert nach ihrer “Wichtigkeit”
- Kontrahiere iterativ unwichtigsten Knoten
- Kontraktion eines Knotens kann “Wichtigkeit” der Nachbarn beeinflussen
- → “Wichtigkeit” der Nachbarn neu berechnen

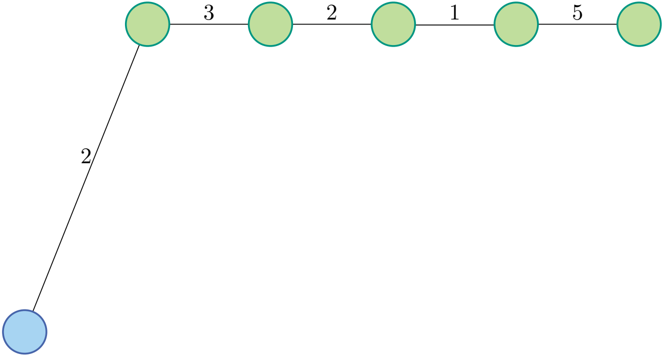
Problemfall: Pfad

Karlsruher Institut für Technologie



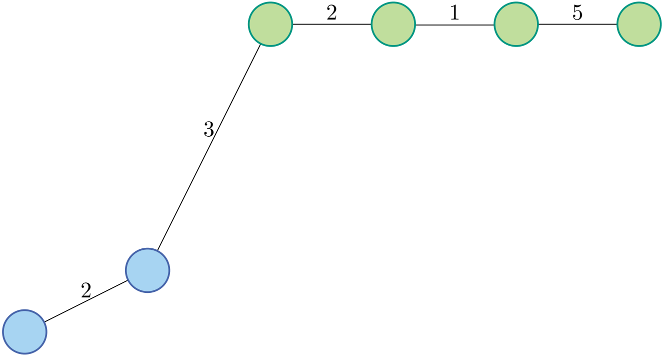
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



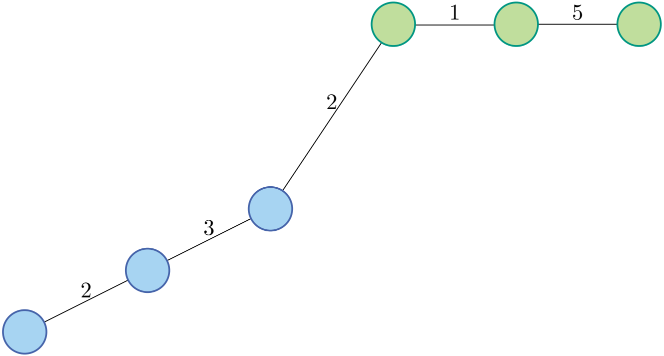
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



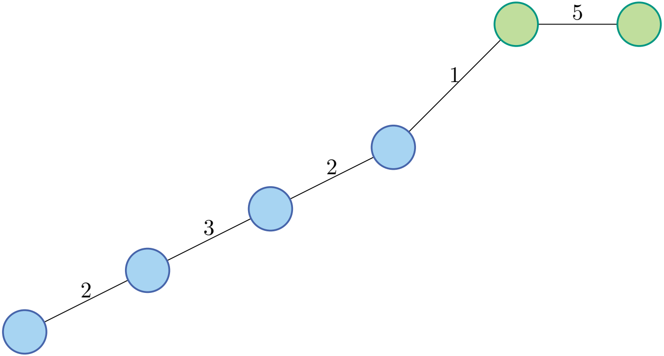
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

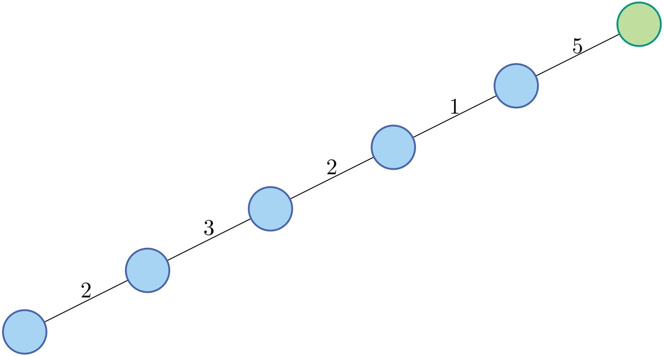
Problemfall: Pfad



Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

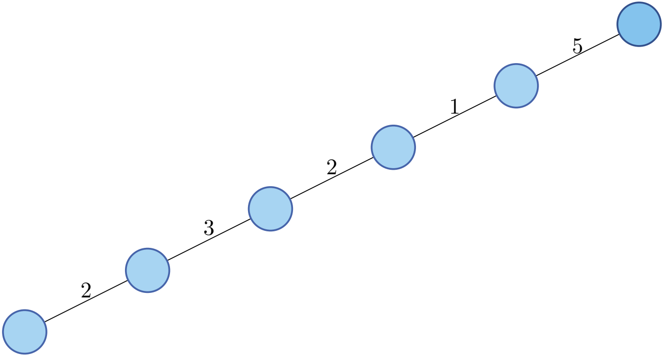
Problemfall: Pfad

Karlsruher Institut für Technologie



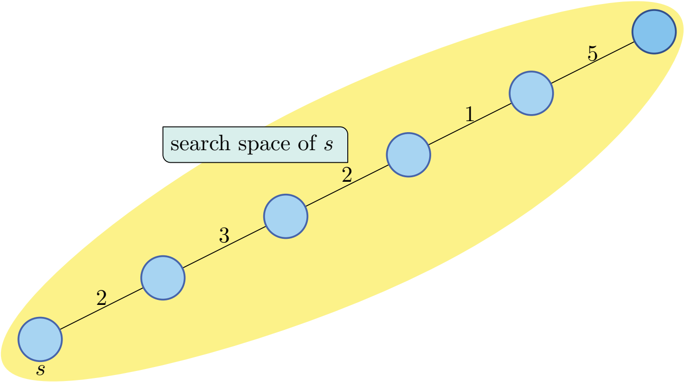
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



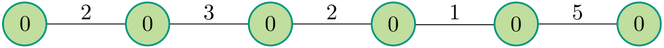
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



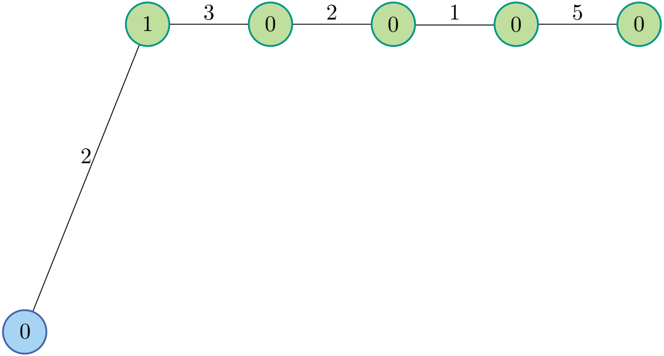
Suchraum von *s* ist der ganze Graph → keine Beschleunigung

Problemfall: Pfad



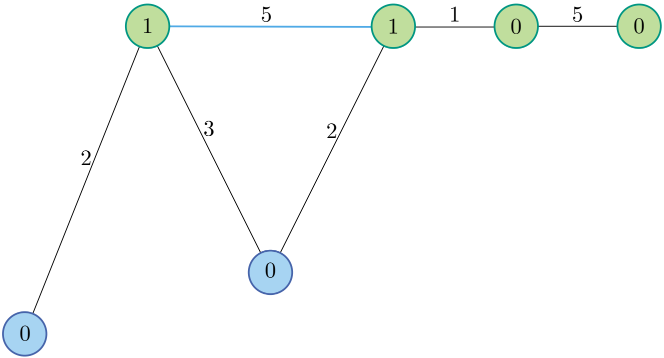
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



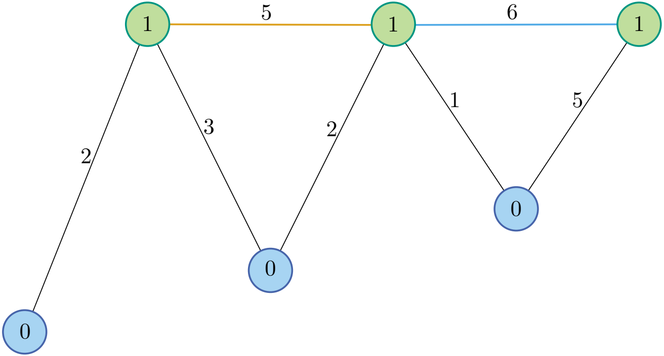
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



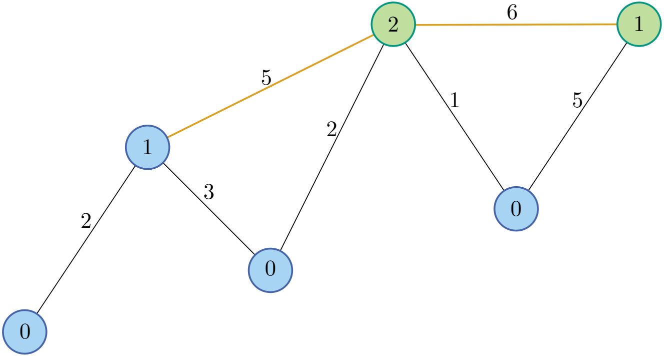
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens
x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



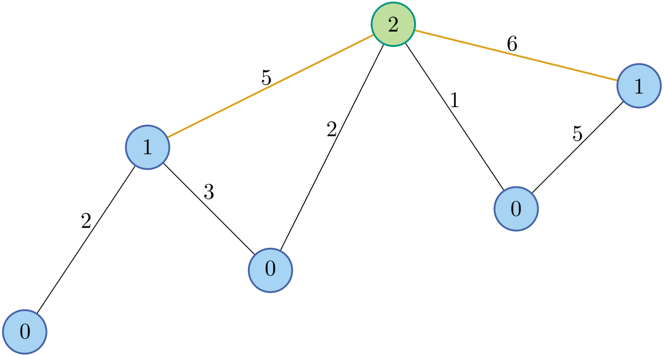
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens
x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x)+1\}$

Problemfall: Pfad



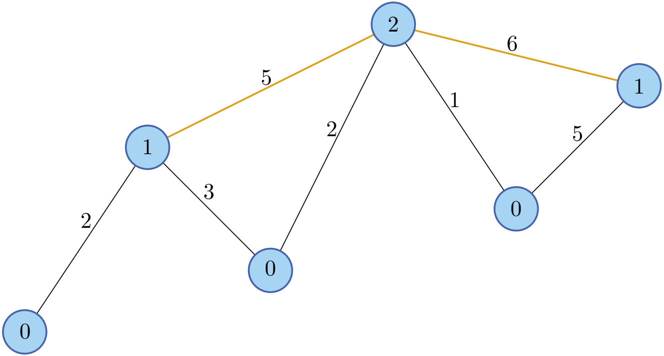
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



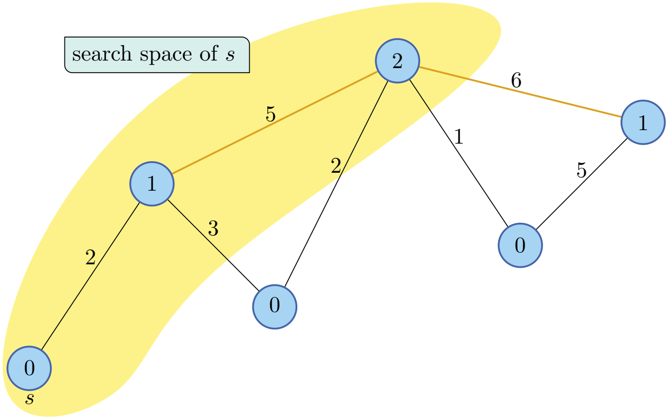
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens
x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Problemfall: Pfad



2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens
x kontrahiert $\rightarrow$ für alle Nachbarn y: $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

Kombination mehrerer Kriterien

Karlsruher Institut für Technologie

- Speichere für jede Kante e die Anzahl $h(e)$ der Originalkanten, aus denen sie besteht
- Es sei $A(x)$ die Menge der eingefügten Shortcuts, wenn x kontrahiert werden würde
- Analog: $D(x)$ die Menge der gelöschten Kanten
- Es sei $I(x)$ die "Wichtigkeit" von x

Eine funktionierende Definition von $I(x)$ ist

$$I(x) := \ell(x) + \frac{|A(x)|}{|D(x)|} + \frac{\sum_{e \in A(x)} h(e)}{\sum_{e \in D(x)} h(e)}$$

Hinweis: Es gibt sehr viele unterschiedliche Definitionen für I. Das ist nur ein Kochrezept, das sich bewährt hat und jeder würzt leicht anders.

Begriffe

- Graph mit Shortcuts heißt augmentierter Graph
- Eine Ordnung π ist eine Permutation der Knoten, so dass die Knoten in der Reihe $\pi(0), \pi(1) \ldots \pi(n-1)$ kontrahiert werden.
- Die inverse Permutation π^{-1} heißt Rank. Der Rank entspricht der "Höhe" eines Knotens in der CH.