Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

# Übungsblatt 6

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 20/21

**Ausgabe:** 26. Januar 2020
**Abgabe:** 9. Februar 2020, 11:30 Uhr (digital im ILIAS)

## Aufgabe 1

(2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C, D\}$, Startsymbol $S$ und Produktionen

$$\begin{aligned} R = \{S &\to AD \\ A &\to CB \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{c} \\ B &\to AD \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{d} \\ C &\to DB \mid \mathsf{c} \\ D &\to AC \mid \mathsf{c} \mid \mathsf{d}\} \end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $\mathsf{ccdcc}$ in der Sprache $L(G)$ enthalten ist.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| c | c | d | c | c |

(b) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort $\mathsf{ccdcc}$ an.

(c) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der ausgibt, ob ein gegebenes Wort $w$ ein Zeuge dafür ist, dass die Grammatik mehrdeutig (d.h. nicht eindeutig) ist. Falls $w$ ein solcher Zeuge ist, geben Sie zwei Syntaxbäume aus.

*Hinweis: Erweitern Sie dazu den CYK-Algorithmus. Berechnen Sie dabei rekursiv für jedes Symbol $X$ in Zelle $V_{ij}$ der Tabelle bis zu zwei Syntaxbäume, die mögliche Ableitungen von $X$ auf das Teilwort $w_{ij}$ repräsentieren.*

(d) Ist die Grammatik $G$ eindeutig? Begründen Sie.

## Aufgabe 2 (5 + 1 = 6 Punkte)

Sei eine Grammatik $G$ durch $V = \{S, A, B, C, D\}, \Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$ und folgende Regelmenge $R$ gegeben:

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid \mathsf{a}B \mid \mathsf{a}C \\
A &\to B \mid C \mid \mathsf{c}A\mathsf{d} \\
B &\to S \mid B\mathsf{a} \\
C &\to D \mid \mathsf{c} \\
D &\to \mathsf{d} \mid \mathsf{d}DD \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(a) Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um $G$ in eine äquivalente Grammatik in erweiterter Chomsky-Normalform zu überführen. Es genügt dabei, wenn sie nach jedem Schritt bzw. jeder Phase das jeweilige Ergebnis angeben.

(b) In Schritt 4, Phase 2 wird beim Ersetzen von Kettenregeln der Form $A \to B$ in umgekehrter topologischer Sortierung vorgegangen. Warum ist dies nötig? Geben Sie eine Grammatik und eine Sortierung der Variablen an, für die das Verfahren nicht zum korrekten Ergebnis führt.

## Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils eine Grammatik vom angegebenen Typ an. Erläutern Sie die Idee der von Ihnen angegebenen Regeln.

(a) $L = \{a^n b^{2n} c^m \mid n \geq 0, m > 0\}$ – kontextfrei

(b) $L = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \geq 0\}$ – kontextsensitiv

## Aufgabe 4 (2 + 4 = 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen den Sprachen der Klasse $\mathsf{NTAPE}(n)$ entsprechen[1], indem Sie in zwei Schritten vorgehen.

[1] Vergleiche Vorlesung 13, Folie 20.

(a) Sei $L$ eine kontextsensitive Sprache. Dann existiert eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die $L$ mit linearem Platzbedarf akzeptiert.

(b) Sei $\mathcal{M}$ eine nichtdeterministische Turing-Maschine, die die Sprache $L(\mathcal{M})$ mit linearem Platzbedarf akzeptiert. Dann existiert eine kontextsensitive Grammatik $G$, so dass $L(G) = L(\mathcal{M})$ gilt.

**Aufgabe 5** (1 + 2 = 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse der Typ-1-Sprachen unter folgenden Operationen abgeschlossen ist:

(a) Vereinigung

(b) Schnitt

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Sie für kontextsensitive Grammatiken ohne Beschränkung der Allgemeinheit fordern können, dass in jeder Ableitungsregel sowohl links als auch rechts höchstens zwei Zeichen stehen.

**Aufgabe 7** (2 + 2 = 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

(a) $L_1 = \{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^* \mid |w|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{b} = |w|_\mathsf{c}\}$, wobei $|w|_x$ angibt, wie oft $x$ in $w$ vorkommt.

(b) $L_2 = \left\{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^j \mid i \geq j\right\}$.

*Hinweis: Dazu können Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen verwenden, das in der 15. Vorlesung am 28.1. behandelt wird.*