Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 1

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 20/21

Ausgabe: 5. November 2020
Abgabe: 24. November 2020, 11:30 Uhr (digital im ILIAS)

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **handschriftlich** und laden Sie eine eingescannte PDF-Version im Übungsmodul Ihrer ILIAS-Tutoriumsgruppe hoch! Beschriften Sie Ihren handschriftlichen Aufschrieb gut sichtbar mit Name und Matrikelnummer. Nicht handschriftliche oder unbeschriftete Abgaben werden nicht akzeptiert!

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben seien zwei Sprachen $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Dabei sei L_1 die Sprache der Wörter, die mit a beginnen und L_2 die Sprache der Wörter mit einer geraden Anzahl an b. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an.

(a) $L_1 \cup L_2$

(b) $L_2 \cdot L_1$

(c) $L_1 \setminus L_2$

(d) L_2 / L_1

(e) L_1^c

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

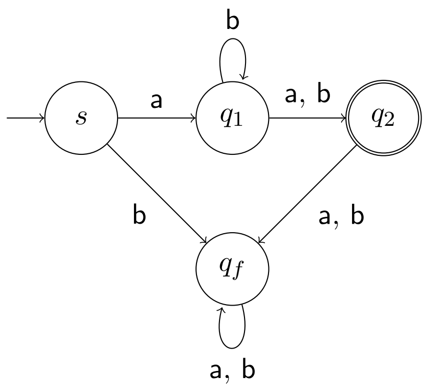
Es sei Σ ein endliches Alphabet und $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_{2020}\}$ eine Menge von 2020 Wörtern der Länge 2020 über dem Alphabet Σ.

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen eines NEA, der L erkennt.

(b) Geben Sie einen DEA an, der L erkennt.

Aufgabe 3 (1 + 3 = 4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Übergangsgraphen gegeben ist:



(a) Welche Sprache erkennt der Automat $\mathcal{A}$?

(b) Konstruieren Sie mithilfe der Potenzmengenkonstruktion den zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen Automaten $\mathcal{A}'$. Geben Sie außerdem den Übergangsgraphen von $\mathcal{A}'$ an. Bezeichnen Sie insbesondere die Zustände in $\mathcal{A}'$ mit den Teilmengen der Zustände in A, die sie repräsentieren.

Aufgabe 4

(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Gegeben seien drei Grammatiken $G_i = (\Sigma, V, S, R_i), i = 1, 2, 3$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, V = \{S, A, B, C\}$ und folgenden Produktionsregeln

(a) $R_1 = \{S \to AB, A \to \mathsf{ba}A\mathsf{ba} \mid \mathsf{baba}, B \to \mathsf{c}S \mid \mathsf{c}\}$

(b) $R_2 = \{S \to AB, A \to \mathsf{ba}A\mathsf{ba} \mid \mathsf{c}, B \to \mathsf{c}S \mid \mathsf{c}\}$

(c) $R_3 = \{S \to AC, A \to \mathsf{a}BA \mid \mathsf{a}B, B \to \mathsf{b}B \mid \varepsilon, C \to \mathsf{c}C \mid \varepsilon\}$

Ist $L(G_i)$ eine reguläre Sprache? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck an. Wenn nicht, geben Sie eine formale Definition der Sprache in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 5

(1 + 2 = 3 Punkte)

(a) Offensichtlich lässt sich jeder deterministische endliche Automat (DEA) durch einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA) simulieren, indem der Nichtdeterminismus in der Überführungsfunktion nicht ausgenutzt wird. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NEA, der wie ein DEA arbeitet. Welche Bedingungen müssen für die Überführungsfunktion $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ gelten? Formulieren Sie die Bedingungen als prädikatenlogische Formel.

(b) Für NEA wurde in der Vorlesung die erweiterte Überführungsfunktion $\bar{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ eingeführt, die einen Zustand q und ein Wort w auf die Menge der Zustände abbildet, die von q nach der Abarbeitung von w erreichbar sind. Mithilfe der Simulation aus dem vorigen Aufgabenteil lässt sich $\bar{\delta}$ auch bei DEA anwenden. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche Aussage für *alle* NEA bzw. DEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ und $L(\mathcal{A}) \neq \Sigma^*$ gelten.

Aussage	NEA	DEA
$\exists w \in L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \in F$		
$\exists w \in L(\mathcal{A}) \forall q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \in F$		
$\forall w \in L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \in F$		
$\forall w \in L(\mathcal{A}) \forall q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \in F$		
$\forall w \notin L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \in F$		
$\forall w \notin L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w) \colon q \notin F$		

Aufgabe 6

(2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache über einem endlichen Alphabet Σ. Für ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n \in \Sigma^*$ definieren wir dessen Umkehrung als $\overleftarrow{w} := w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$.

Wir betrachten zunächst das Beispielalphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und folgende Beispielsprache:

$$L_1 := \{\mathsf{aa}x\mathsf{b} \mid x \in \Sigma^* \text{ und } x \text{ enthält } \mathsf{ba} \text{ als Teilwort}\}$$

(a) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und $\overleftarrow{L_1}$ an.

(b) Geben Sie endliche Automaten für L_1 und $\overleftarrow{L_1}$ an.

Nun betrachten wir ein beliebiges endliches Alphabet Σ und eine beliebige reguläre Sprache L. Sie sollen nun auf zwei verschiedene Wege zeigen, dass $\overleftarrow{L} := \{\overleftarrow{w} \mid w \in L\}$ ebenfalls regulär ist.

(c) Beschreiben Sie, wie aus einem regulären Ausdruck für L ein regulärer Ausdruck für $\overleftarrow{L}$ konstruiert werden kann. Beweisen Sie, dass Ihre Konstruktion korrekt ist.

(d) Beschreiben Sie, wie aus einem endlichen Automaten für L ein endlicher Automat für $\overleftarrow{L}$ konstruiert werden kann. Beweisen Sie, dass Ihre Konstruktion korrekt ist.