

Übungsblatt 1

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 19/20

Ausgabe: 17. Oktober 2019

Abgabe: 5. November 2019, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben seien zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Dabei sei L_1 die Sprache der Wörter, die das Teilwort **bb** enthalten, und L_2 die Sprache der Wörter, in denen kein **b** auf ein **a** folgt. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an.

- (a) $L_1 \cup L_2$
- (b) $L_1 \cap L_2$
- (c) L_1/L_2
- (d) L_2/L_1
- (e) L_1^c
- (f) L_2^c

Aufgabe 2

(3 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Der ebenso geniale wie auch vergessliche Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist im Baufieber. Der Hauptzugang zu seinem unterirdischen Geheimlabor soll von einer unüberwindbaren Stahltür geschützt werden, die sich nur durch Eingabe eines gültigen Passworts öffnen lässt. Bei einer falschen Eingabe wird der Eindringling stattdessen durch eine Falltür im Boden den Haien vorgeworfen. Da sich Doktor Meta aufgrund seiner Vergesslichkeit nur schlecht an Passwörter erinnern kann, will er die Tür so einstellen, dass Sie jedes Wort aus einer zuvor festgelegten regulären Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ akzeptiert. Dieses – sicherheitstechnisch fragwürdige, aber für Doktor Meta sehr praktische – Verfahren soll intern durch einen deterministischen endlichen Automaten realisiert werden. Sie wurden von Doktor Meta als neuer Sicherheitsexperte eingestellt und sollen ihm bei den Details helfen:

- (a) Geben Sie einen deterministischen Automaten für die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 4, |w|_0 \geq 1, |w|_1 \geq 1\}$ an. Dabei bezeichnet $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols a in w . Also enthält L genau die Wörter mit mindestens 4 Zeichen, die mindestens eine 0 und mindestens eine 1 enthalten.

- (b) Nun sei L eine beliebige reguläre Sprache über Σ . Doktor Meta möchte einige seiner Mitarbeiter unauffällig verschwinden lassen. Dafür hat er die Passwörter, die sie normalerweise eingeben, studiert und Muster¹ darin gefunden. Er beauftragt Sie nun, die Kontrolleinheit so umzubauen, dass gerade die Muster der Leute, die er loswerden möchte, von der Kontrolleinheit abgelehnt werden. Sie bekommen also eine endliche Teilmenge $L' \subseteq L$ gegeben und sollen den Automaten so umbauen, dass er $L \setminus L'$ erkennt. Beweisen Sie, dass dies für jede endliche Teilmenge L' möglich ist, also dass $L \setminus L'$ regulär ist.
- (c) Ist dies auch noch möglich, wenn Doktor Meta unendlich viele Mitarbeiter loswerden will, d.h. wenn L' unendlich viele Wörter enthält?

Aufgabe 3

(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Gegeben seien drei Grammatiken $G_i = (\Sigma, V, S, R_i), i = 1, 2, 3$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}, V = \{S, A, B\}$ und folgenden Produktionsregeln

- (a) $R_1 = \{S \rightarrow bS \mid A, A \rightarrow aBa, B \rightarrow aA \mid a\}$
- (b) $R_2 = \{S \rightarrow bS \mid A, A \rightarrow aBa, B \rightarrow cA \mid c\}$
- (c) $R_3 = \{S \rightarrow aS \mid A, A \rightarrow bB, B \rightarrow cB \mid A \mid \varepsilon\}$

Ist $L(G_i)$ eine reguläre Sprache? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck an. Wenn nicht, begründen Sie dies kurz (informell) und geben sie eine formale Definition der Sprache in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 4

(1 + 2 = 3 Punkte)

- (a) Offensichtlich lässt sich jeder deterministische endliche Automat (DEA) durch einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA) simulieren, indem der Nichtdeterminismus in der Überföhrungsfunktion nicht ausgenutzt wird. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NEA, der wie ein DEA arbeitet. Welche Bedingungen müssen für die Überföhrungsfunktion $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ gelten? Formulieren Sie die Bedingungen als prädikatenlogische Formel.
- (b) Für NEA wurde in der Vorlesung die erweiterte Überföhrungsfunktion $\bar{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ eingeföhrt, die einen Zustand q und ein Wort w auf die Menge der Zustände abbildet, die von q nach der Abarbeitung von w erreichbar sind. Mithilfe der Simulation aus dem vorigen Aufgabenteil lässt sich $\bar{\delta}$ auch bei DEA anwenden. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche Aussage für *alle* NEA bzw. DEA \mathcal{A} mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ und $L(\mathcal{A}) \neq \Sigma^*$ gelten.

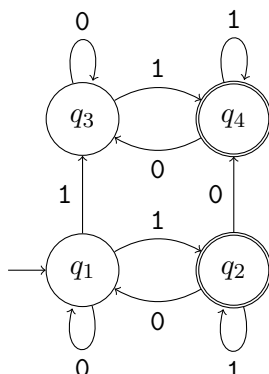
Aussage	NEA	DEA
$\exists w \in L(\mathcal{A}) \forall q \in \bar{\delta}(s, w): q \in F$		
$\exists w \notin L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w): q \in F$		
$\exists w \notin L(\mathcal{A}) \forall q \in \bar{\delta}(s, w): q \in F$		
$\exists w \notin L(\mathcal{A}) \forall q \in \bar{\delta}(s, w): q \notin F$		
$\forall w \in L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w): q \in F$		
$\forall w \notin L(\mathcal{A}) \exists q \in \bar{\delta}(s, w): q \notin F$		

¹Muster sind beliebige Mengen von Wörtern über dem Alphabet Σ .

Aufgabe 5

(3 + 2 = 5 Punkte)

Gegeben ist folgender nichtdeterministischer endlicher Automat:



- Nutzen Sie die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung, um den Automaten deterministisch zu machen. Unerreichbare Zustände dürfen Sie dabei direkt entfernen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion entstandene DEA ist nicht minimal. Geben Sie einen äquivalenten DEA mit **höchstens** 4 Zuständen an. Sie müssen dafür nicht die Äquivalenzklassenkonstruktion aus der Vorlesung anwenden.

Hinweis: Die ursprüngliche Aufgabenstellung verlangte einen Automaten mit genau 4 Zuständen. Tatsächlich hat der minimale Automat nur 3 Zustände.

Aufgabe 6

(3 + 3 + 2 (+ 4) = 8 (+ 4) Punkte)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet und L eine beliebige reguläre Sprache über Σ . Zeigen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind:

- $L_1 := \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in \Sigma^* : vw \in L\}$, also die Menge der Präfixe von Wörtern aus L .
- $L_2 := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : uv \in L\}$, also die Menge der Suffixe von Wörtern aus L .
- $L_3 := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u, w \in \Sigma^* : uvw \in L\}$, also die Menge der Teilwörter von Wörtern aus L .
- Bonusaufgabe:** $L_4 := \{v = v_1 \dots v_n \text{ mit } v_1, \dots, v_n \in \Sigma \mid \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u = u_0 v_1 u_1 v_2 \dots u_{n-1} v_n u_n \in L\}$, also die Menge der Teilfolgen von Wörtern aus L .

Um zu zeigen, dass L_i regulär ist, gehen Sie wie folgt vor: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der deterministische endliche Automat, der L erkennt. Bauen Sie \mathcal{A} zu einem endlichen Automaten \mathcal{A}_i um, der L_i erkennt. Beweisen Sie, dass \mathcal{A}_i genau die Wörter aus L_i akzeptiert.