Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik Übung

5. Übungstermin · 3. Dezember 2019
Jonas Sauer

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · LEHRSTUHL ALGORITHMIK

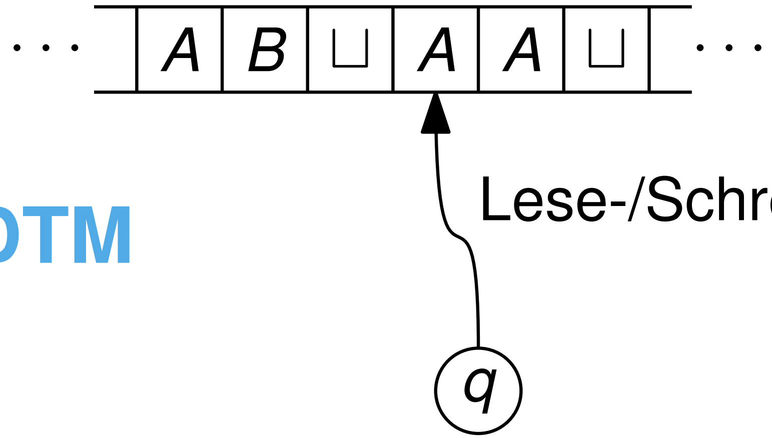
Übersicht

Karlsruher Institut für Technologie

Inhalt

- Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)
- Polynomiale Transformation
- NP-vollständige Probleme

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



Eingabe- und Rechenband

Lese-/Schreibkopf

endliche Kontrolle

DTM

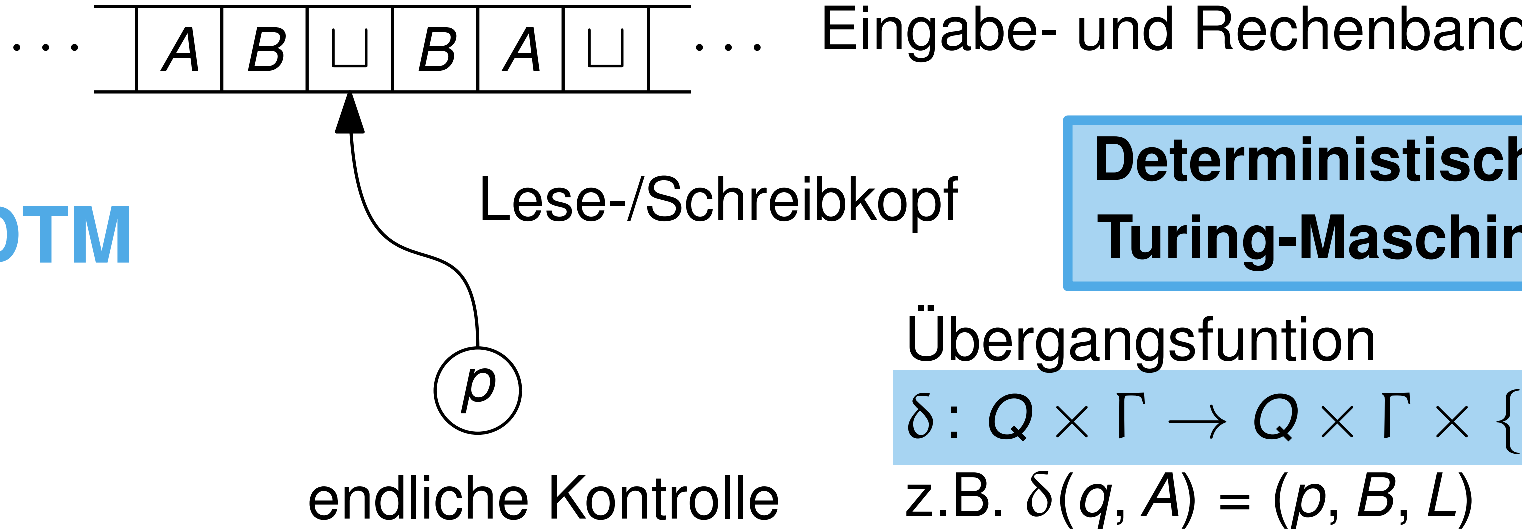
Deterministische Turing-Maschine

Übergangsfuntion

$\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$

z.B. $\delta(q, A) = (p, B, L)$

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



DTM

Deterministische Turing-Maschine

Übergangsfuntion

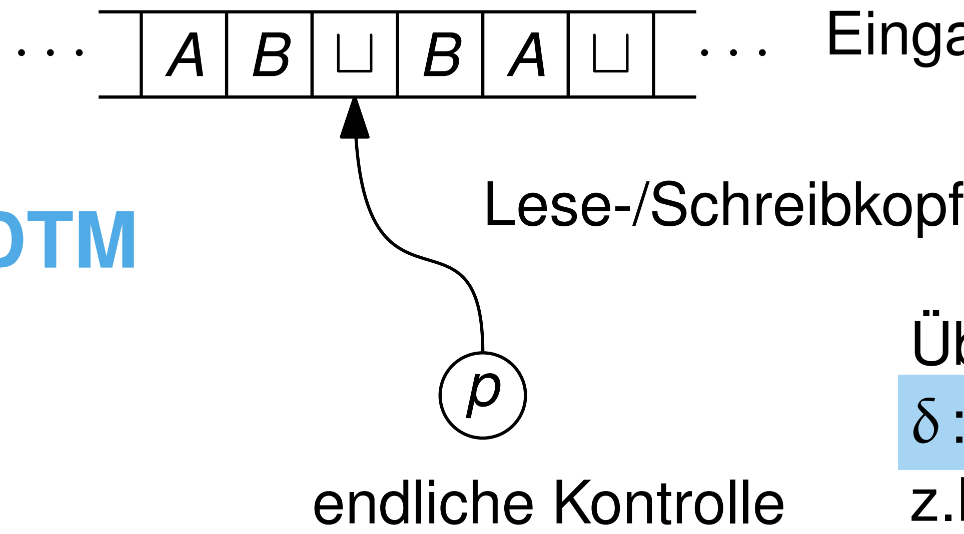
$\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$

z.B. $\delta(q, A) = (p, B, L)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)

DTM



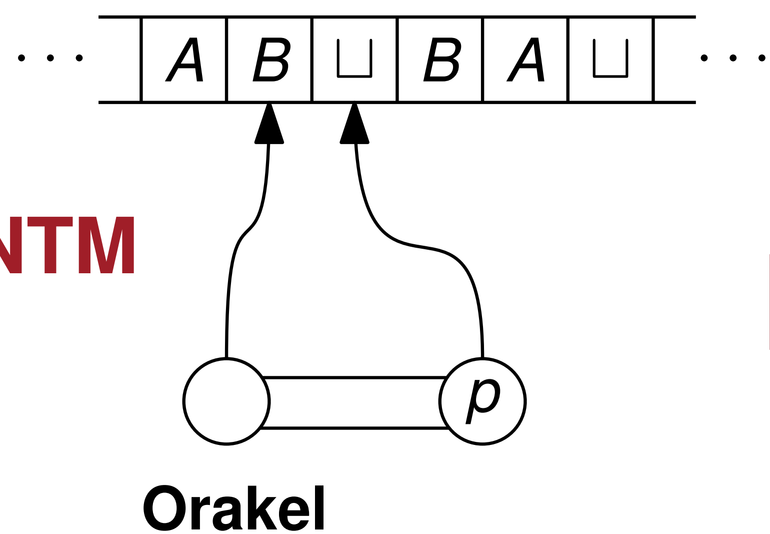
Deterministische Turing-Maschine

Übergangsfuntion

$\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$

z.B. $\delta(q, A) = (p, B, L)$

NTM



Nichtdeterministische Turing-Maschine

Orakelmodul

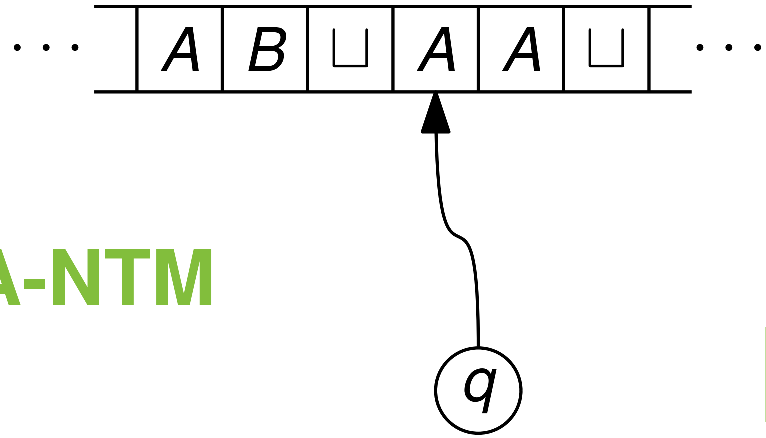
(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

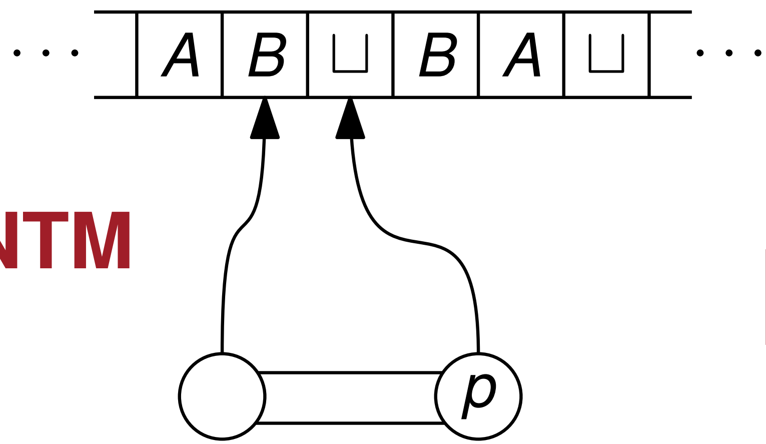
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta\colon Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

Orakelmodul

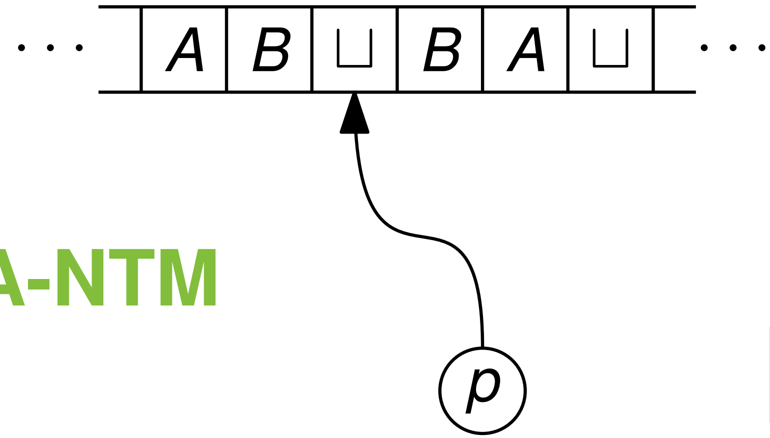
(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

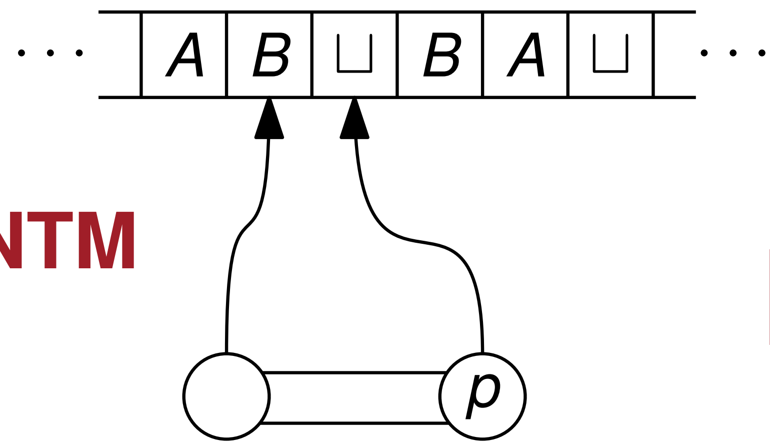
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta \colon Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

Orakelmodul

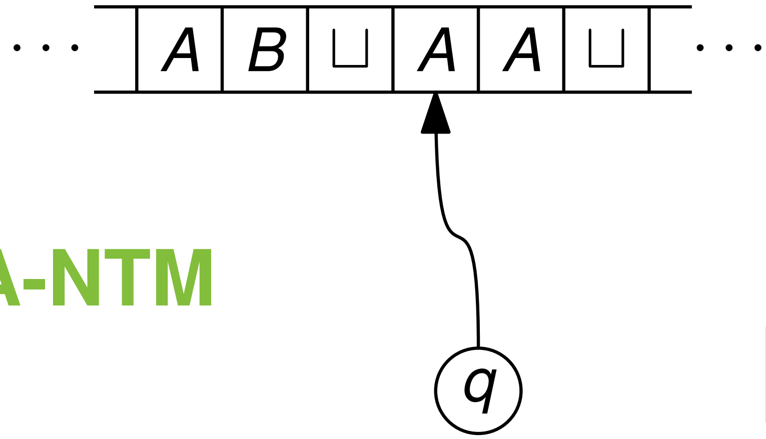
(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

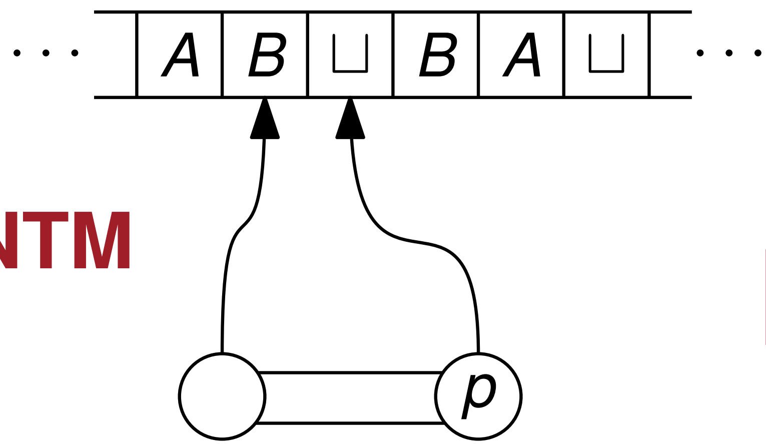
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta\colon Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

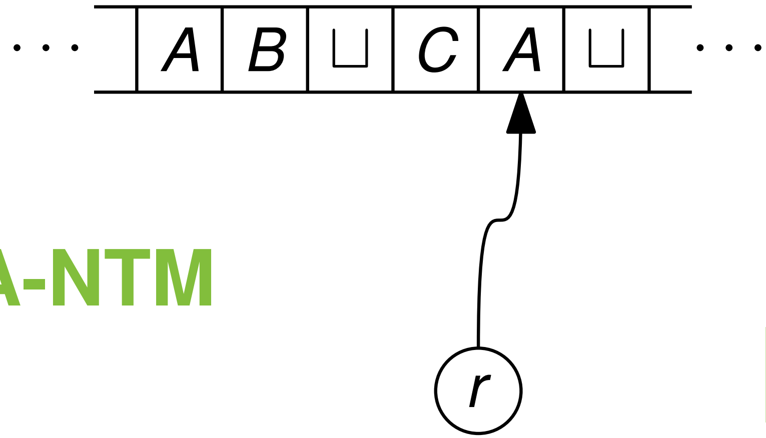
Orakelmodul

(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

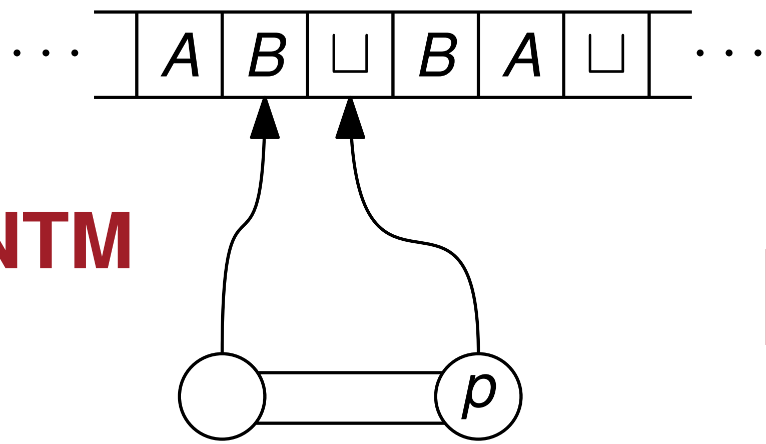
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

Orakelmodul

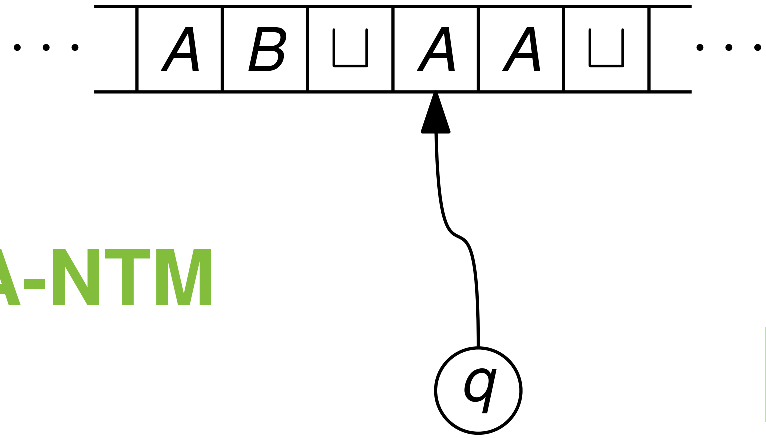
(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

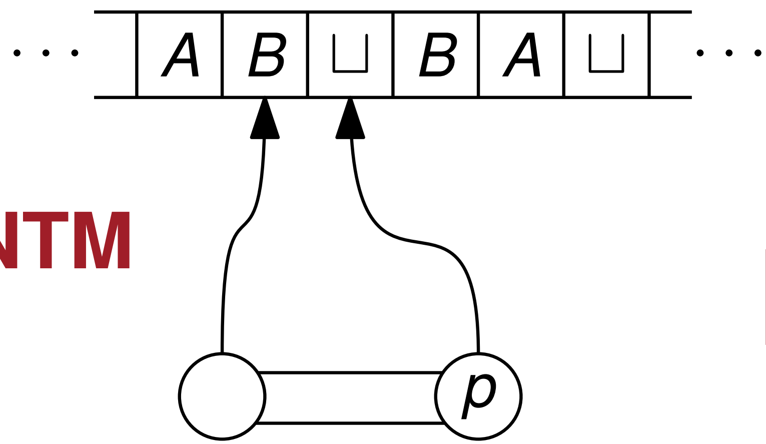
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta\colon Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

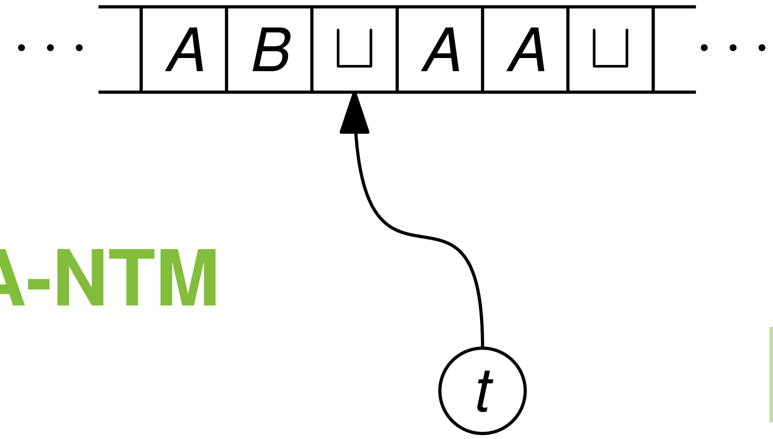
Orakelmodul

(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)



A-NTM

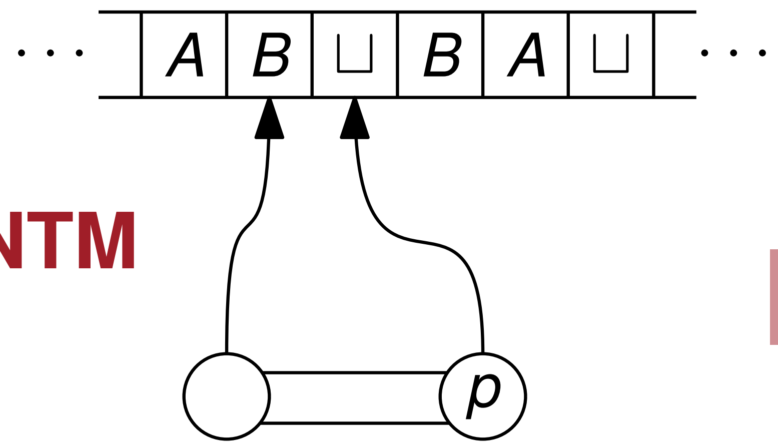
Wahlmöglichkeiten

Alternative nichtdeterministische Turing-Maschine

Erweiterte Übergangsfuntion

$\delta\colon Q \times \Gamma \to 2^{Q\times\Gamma\times\{L,N,R\}}$

z.B. $\delta(q, A) = \{(p, B, L), (r, C, R), (t, A, L)\}$



NTM

Orakel

Nichtdeterministische Turing-Maschine

Orakelmodul

(1) Orakel schreibt Wort vor die Eingabe

(2) Orakel wird inaktiv

(3) endliche Kontrolle wird aktiv

Die Klassen NP und ANP

Eine **NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt, bei Eingabe x in q_J zu enden.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Die Klassen NPund ANP

Karlsruher Institut für Technologie

Eine **NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt, bei Eingabe x in q_J zu enden.

Orakel kann
geeignete Hilfe schreiben
(z.B. Lösungvorschlag)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Die Klassen NP und ANP

Eine **NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt, bei Eingabe x in q_J zu enden.

Orakel kann
geeignete Hilfe schreiben
(z.B. Lösungvorschlag)

Die Klasse NP:
= alle Sprachen, die von einer **NTM**
in polynomialer Laufzeit akzeptiert werden

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Die Klassen NPund ANP

Eine **NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt,
bei Eingabe x in q_J zu enden.

Orakel kann
geeignete Hilfe schreiben
(z.B. Lösungvorschlag)

Die Klasse NP:
= alle Sprachen, die von einer **NTM**
in polynomialer Laufzeit akzeptiert werden

Eine **A-NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt,
bei Eingabe x in q_J zu enden.

Übergangsfunktion
kann die richtigen
Entscheidungen treffen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Die Klassen NP und ANP

Eine **NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt, bei Eingabe x in q_J zu enden.

Orakel kann geeignete Hilfe schreiben (z.B. Lösungvorschlag)

Die Klasse NP:
= alle Sprachen, die von einer **NTM** in polynomialer Laufzeit akzeptiert werden

---

Eine **A-NTM** akzeptiert ein Wort x, wenn es eine Möglichkeit gibt, bei Eingabe x in q_J zu enden.

Übergangsfunktion kann die richtigen Entscheidungen treffen

Die Klasse ANP:
= alle Sprachen, die von einer **A-NTM** in polynomialer Laufzeit akzeptiert werden

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: $\mathrm{ANP} \subseteq \mathrm{NP}$

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

Konstruktion von **NTM** M' zu gegebener **A-NTM** M:

- Sei $|\delta_M(q, A)| \leq K$ für alle (q, A). (max. # Wahlmöglichkeiten in M)
- Nummeriere Optionen in $\delta_M(q, A)$ von 1 bis max. K.
- O.B.d.A. seien $1, \ldots, K \notin \Gamma_M$.
- **Idee:** Orakel von M' schreibt Zahlenfolge der „richtigen Entscheidungen“.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Konstruktion von **NTM** M' zu gegebener **A-NTM** M:

- Sei $|\delta_M(q, A)| \leq K$ für alle (q, A). (max. # Wahlmöglichkeiten in M)
- Nummeriere Optionen in $\delta_M(q, A)$ von 1 bis max. K.
- O.B.d.A. seien $1, \ldots, K \notin \Gamma_M$.
- **Idee:** Orakel von M' schreibt Folge der „richtigen Entscheidungen".
- Definiere deterministischen Teil von M' als **2-Band-TM** M'_{det} durch

$$\delta_{M'_{\text{det}}}(q, (i, A)) = (p, (i, B), (R, D)) \iff i\text{-te Option in } \delta_M(q, A) \text{ ist } (p, B, D)$$

2. Kopf, endl. Kontrolle folgen $\delta_M(q, A)$

1. Kopf liest Orakel-Vorgabe

- 2-Band-TM kann durch 1-Band-TM simuliert werden (siehe Übung 3)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

M akzeptiert Eingabe x.

$\Rightarrow$ Es gibt Übergänge*, die M bei Eingabe x in q_J überführen.

$\Rightarrow$ Es gibt Orakel-Hinweis, der M' bei Eingabe x in q_J überführt.

$\Rightarrow$ M' akzeptiert Eingabe x.

* aka Entscheidungen bei Wahlmöglichkeiten

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

1. M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.
2. Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

→ M akzeptiert Eingabe x.

$\iff$ Es gibt Übergänge*, die M bei Eingabe x in q_J überführen.

$\iff$ Es gibt Orakel-Hinweis, der M' bei Eingabe x in q_J überführt.

$\iff$ M' akzeptiert Eingabe x.

* aka Entscheidungen bei Wahlmöglichkeiten

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

Laufzeit von M' bei akzeptierter Eingabe x

$\leq$ Orakel-Schreibezeit + #Schritte, um M'_{det} in q_J zu überführen

$\leq$ 2$\cdot$ #Schritte, um M in q_J zu überführen

$\leq$ 2$\cdot$ Laufzeit von M

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

A-NTMs sind nicht mächtiger als NTMs

Behauptung: ANP $\subseteq$ NP

Wir müssen zeigen:

Zu jeder **A-NTM** M gibt es eine **NTM** M', sodass gilt:

① M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.

② Laufzeit von M' ist beschränkt durch ein Polynom in der Laufzeit von M.

→ Laufzeit von M' bei akzeptierter Eingabe x

$\leq$ Orakel-Schreibezeit + #Schritte, um M'_{det} in q_J zu überführen

$\leq 2\cdot$ #Schritte, um M in q_J zu überführen

$\leq 2\cdot$ Laufzeit von M

Damit ist die Behauptung ANP $\subseteq$ NP gezeigt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht

Inhalt

- Nichtdeterministische Turing-Maschine(n)
- Polynomiale Transformation
- NP-vollständige Probleme

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Polynomiale Transformation

Karlsruher Institut für Technologie

Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:

- es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
- für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Wir schreiben dann $L_1 \propto L_2$ (L_1 ist polynomial transformierbar in L_2).

Polynomiale Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \dots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Polynomiale Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

Polynomiale Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

1 Schritt: Zeige, dass f von DTM berechnet werden kann.

- DTM erhält als Eingabe eine Dezimalzahl.
- DTM löscht alle Zeichen bis auf das letzte Zeichen.
- Wenn verbleibendes Zeichen ungerade, dann überschreibe mit *aa*.
- **Ansonsten** überschreibe mit *a*.
- Polynomieller Zeitaufwand.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Polynomiale Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

2. Schritt: Zeige, dass für jedes $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$

$$w \in L_1 \Leftrightarrow w \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow f(w) = aa \Leftrightarrow f(w) \in L_2$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Karlsruher Institut für Technologie

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM**
in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM**
in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass
für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP
Π' polynomial reduzierbar auf Π
d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?

(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.

(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	**(1)** Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	**(2)** Konstruiere **NTM**, die Π löst.

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?	Ist Π NP-schwer?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	**(1)** Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.	**(1)** Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	**(2)** Konstruiere **NTM**, die Π löst.	**(2)** Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?	Ist Π NP-schwer?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	**(1)** Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.	**(1)** Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	**(2)** Konstruiere **NTM**, die Π löst.	**(2)** Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

gute Idee

schlechte Idee

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?	Ist Π NP-schwer?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	**(1)** Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.	**(1)** Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	**(2)** Konstruiere **NTM**, die Π löst.	**(2)** Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

gute Idee

schlechte Idee

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, sodass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?	Ist Π NP-schwer?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.	(1) Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	(2) Konstruiere **NTM**, die Π löst.	(2) Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

gute Idee

schlechte Idee

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P

Problem 2SAT:

- **Gegeben:** Menge U von Variablen, Menge von C Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält.
- **Gefragt:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Beispiel: $U = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

$C = \{ \neg x_1 \vee x_2, \neg x_2 \vee x_3, x_1 \vee \neg x_3, x_2 \vee x_3 \}$

erfüllend: $x_1 = x_2 = x_3 = \textsc{True}$

nicht erfüllend: $x_1 = \textsc{True}$, $x_2 = x_3 = \textsc{False}$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass 2SAT in P liegt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, so dass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?

(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.

(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.

Ist $\Pi \in$ NP?

(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.

(2) Konstruiere **NTM**, die Π löst.

Ist Π NP-schwer?

(1) Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.

(2) Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

gute Idee

schlechte Idee

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

2SAT $\in$ P

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$

Gebe $G = (V, E)$ für folgende zwei Instanzen an:

Instanz 1: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Instanz 2: $x_1 \vee x_2 \quad x_1 \vee \neg x_2 \quad \neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_1 \vee \neg x_2$

5 min Zeit

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

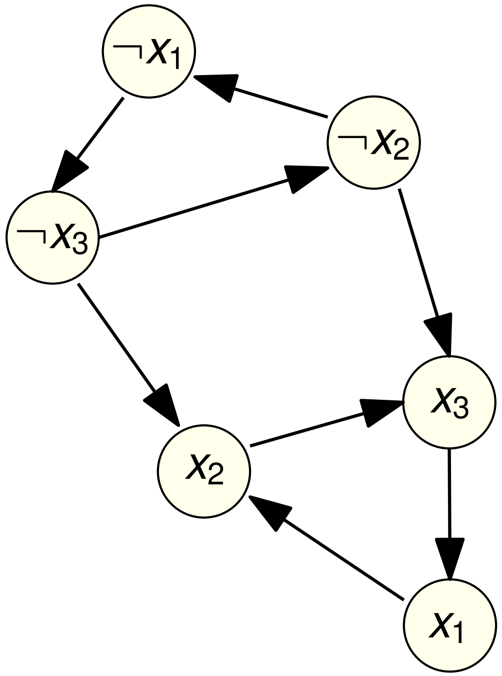
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

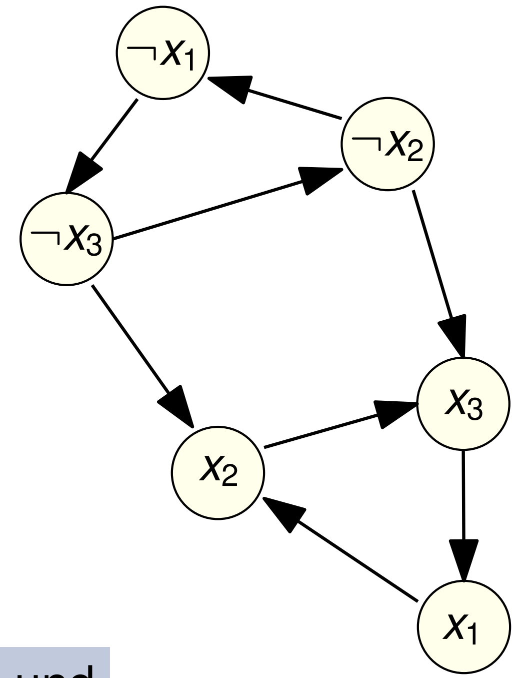
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

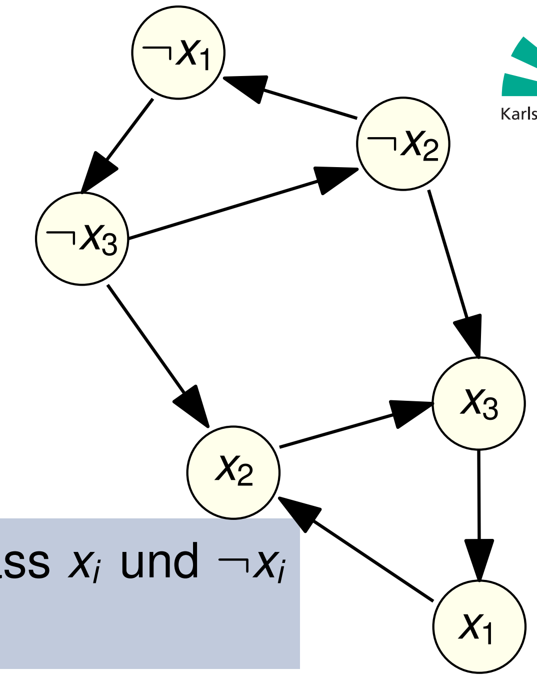
Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2$ $\quad \neg x_2 \vee x_3$ $\quad x_1 \vee \neg x_3$ $\quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

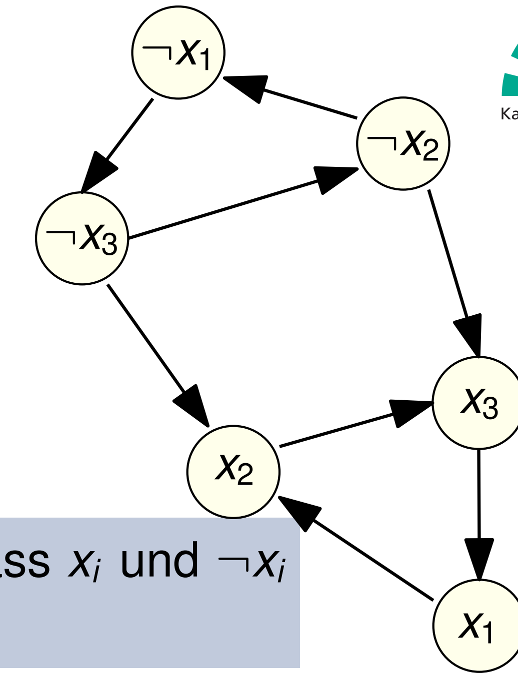
1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

2SAT $\in$ P



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

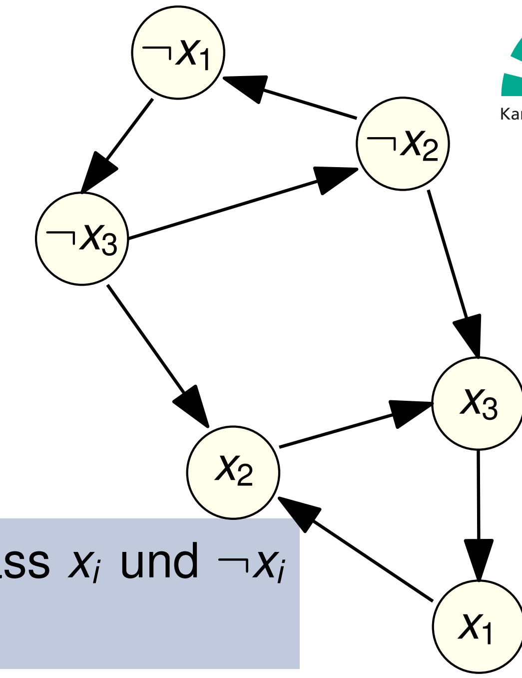
1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

„$\Rightarrow$" **Annahme:** $\exists$ x_i und $\neg x_i$, die in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in$ P



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

„$\Rightarrow$“ **Annahme:** $\exists$ x_i und $\neg x_i$, die in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

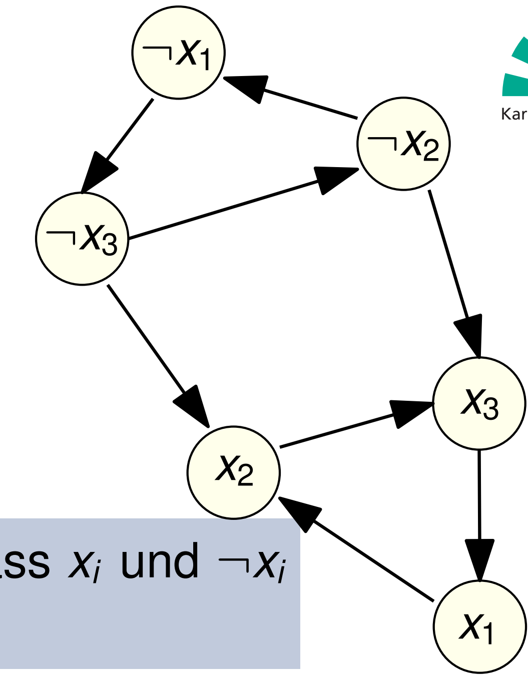
1. Es gibt gerichteten Pfad $x_i, \ldots, \neg x_i$. → Es gilt Implikation $x_i \Rightarrow \neg x_i$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $\neg x_i, \ldots, x_i$. → Es gilt Implikation $\neg x_i \Rightarrow x_i$.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in$ P

Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.



Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

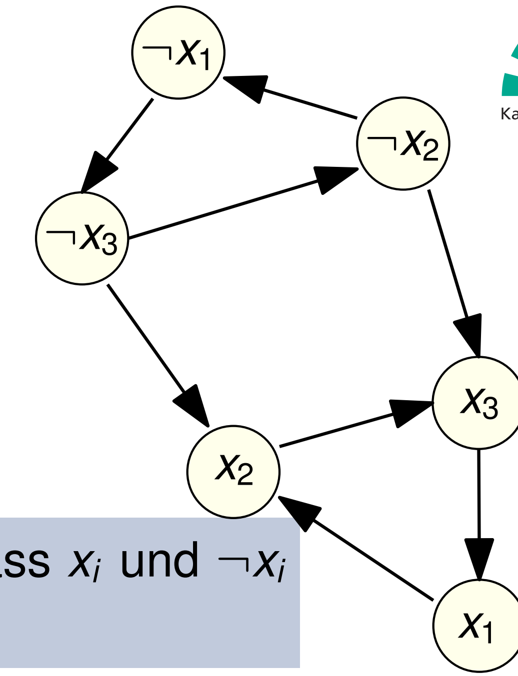
„$\Rightarrow$“ **Annahme:** $\exists\ x_i$ und $\neg x_i$, die in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

1. Es gibt gerichteten Pfad $x_i, \ldots, \neg x_i$. $\longrightarrow$ Es gilt Implikation $x_i \Rightarrow \neg x_i$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $\neg x_i, \ldots, x_i$. $\longrightarrow$ Es gilt Implikation $\neg x_i \Rightarrow x_i$.

C erfüllbar

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in$ P



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

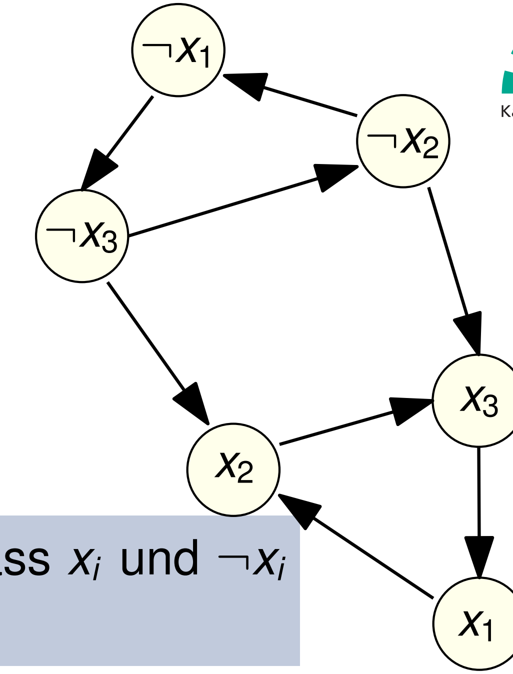
„$\Leftarrow$" Es gibt kein x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in$ P

Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.



Zeige: C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

„$\Leftarrow$“ Es gibt kein x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbundenen Komponente liegen.

Setze x_i = *false*, falls es gerichteten Pfad $x_i, \dots, \neg x_i$ gibt, denn es gilt $x_i \Rightarrow \neg x_i$.

Setze x_i = *true*, falls es gerichteten Pfad $\neg x_i, \dots, x_i$ gibt, denn es gilt $\neg x_i \Rightarrow x_i$.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

NP-Vollständigkeit

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathrm{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathrm{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathrm{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathrm{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in$ NP und
- für alle $L' \in$ NP gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

a) Orakel rät mögliche Lösung $\mathcal{L}$ für gegebene Instanz.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathrm{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathrm{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

a) Orakel rät mögliche Lösung $\mathcal{L}$ für gegebene Instanz.

b) Gebe in polynomieller Zeit berechenbares Zertifikat an, dass $\mathcal{L}$ eine Lösung von I ist.

→ **Beispiel:** Algorithmus, der in polynomieller Zeit überprüft, ob geratene Lösung $\mathcal{L}$ tatsächlich eine Lösung von I ist.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathrm{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathrm{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in$ NP und
- für alle $L' \in$ NP gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

a) Gebe polynomielle Reduktion $\propto$ an, sodass $\Pi' \propto \Pi$.
Zeige, dass $\propto$ tatsächlich polynomiell ist, z.B. beweise Laufzeit im $\mathcal{O}$-Kalkül.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NP-**Vollständigkeit**

Eine Sprache L heißt NP-**vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathrm{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathrm{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-vollständig, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π NP-vollständig ist:

1. Schritt: Zeige, dass Π in NP liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es NP-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$.

a) Gebe polynomielle Reduktion $\propto$ an, sodass $\Pi' \propto \Pi$.
   Zeige, dass $\propto$ tatsächlich polynomiell ist, z.B. beweise Laufzeit im $\mathcal{O}$-Kalkül.

b) Sei $I' \in \Pi'$ beliebige Instanz und sei $I \in \Pi$ die Transformation von I' bzgl. $\propto$.
   Zeige: I' ist eine *Ja*-Instanz von Π' **genau dann, wenn** I ist eine *Ja*-Instanz von Π.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Einige NP-vollständige Probleme

3SAT $\xrightarrow{\propto}$ MAX2SAT

CLIQUE $\xrightarrow{\propto}$ UNABHÄNGIGE MENGE

CLIQUE $\xrightarrow{\propto}$ KNOTENÜBERDECKUNG

KNOTENÜBERDECKUNG $\xrightarrow{\propto}$ MENGENÜBERDECKUNG

3COLOR $\xrightarrow{\propto}$ KLAUSURPLAN

MAX2SAT ist NP-vollständig

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

1. Schritt: MAX2SAT liegt in NP.

1. Orakel rät die Belegung der Variablen aus U.
2. Überprüfe durch Einsetzen in polynomieller Zeit, ob mindestens k Klauseln erfüllt werden.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf MAX2SAT

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\text{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\text{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\text{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\text{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\text{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\text{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

i. Zeigen Sie, dass F_c nicht erfüllbar ist.

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

i. Zeigen Sie, dass F_c nicht erfüllbar ist.

Wegen Gruppe I müssen x, y, z und w_c wahr sein.

$\longrightarrow$ Klauseln aus Gruppe II können nicht wahr sein.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\text{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\text{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\text{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf MAX2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln.
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.

  → $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf MAX2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln.
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.

  → $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.

Was fehlt noch für die Reduktion?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf MAX2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln.
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.

  $\longrightarrow$ $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.
- Setze Parameter k auf $7m$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Problem MAX2SAT:

Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Zeigen Sie, dass MAX2SAT NP-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf MAX2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln.
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.

  ⟶ $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.
- Setze Parameter k auf $7m$.

  ⟶ MAX2SAT-Instanz I' mit $10m$ Klauseln und Parameter $k = 7m$.

Beweise: I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine Ja-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine Ja-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine Ja-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt.

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine Ja-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt.

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

$\Rightarrow$ In jeder Menge F_c sind 7 Klauseln erfüllt.

MAX2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann, wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7m$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine Ja-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt.

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

$\Rightarrow$ In jeder Menge F_c sind 7 Klauseln erfüllt.

Aus folgt, dass jede Klausel c von I ebenfalls erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Behauptung: MAX2SAT ist NP-vollständig.

Zusammenfassung des Beweises

MAX2SAT ist in NP

↓

Konstruierte **NTM** löst Max2SAT

↓

durch Raten und Verifizieren

↓

in polynomialer Zeit

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

MAX2SAT

Behauptung: MAX2SAT ist NP-vollständig.

Zusammenfassung des Beweises

MAX2SAT ist in NP

Konstruierte **NTM** löst Max2SAT

durch Raten und Verifizieren

in polynomialer Zeit

MAX2SAT ist NP-schwer

Polynomielle Reduktion von 3SAT

aus 3SAT-Instanz I konstruiere MAX2SAT-Instanz I'

Zeit für Konstruktion von I' ist poly($|I|$)

I' lösbar gdw. I lösbar

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Komplexitätsklassen und Werkzeugkasten

Die Klasse NP:
= alle Probleme, die von einer **NTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

Die Klasse P:
= alle Probleme, die von einer **DTM** in polynomialer Zeit gelöst werden

NP-schwere Probleme:
= alle Probleme Π, so dass für alle Probleme in $\Pi' \in$ NP Π' polynomial reduzierbar auf Π d.h. $\Pi' \propto \Pi$.

Ist $\Pi \in$ P?	Ist $\Pi \in$ NP?	Ist Π NP-schwer?
(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ P.	(1) Zeige $\Pi \propto \Pi'$ für bekanntes $\Pi' \in$ NP.	(1) Zeige $\Pi' \propto \Pi$ für bekanntes Π' NP-schwer.
(2) Konstruiere **DTM**, die Π löst.	(2) Konstruiere **NTM**, die Π löst.	(2) Beweise ad hoc, dass Π NP-schwer.

gute Idee

schlechte Idee

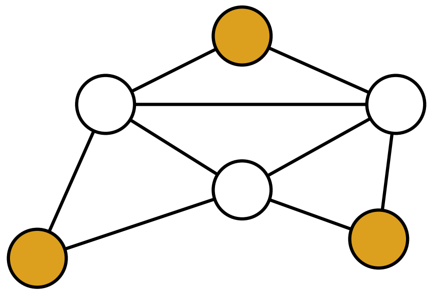
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

UNABHÄNGIGE MENGE ist NP-vollständig

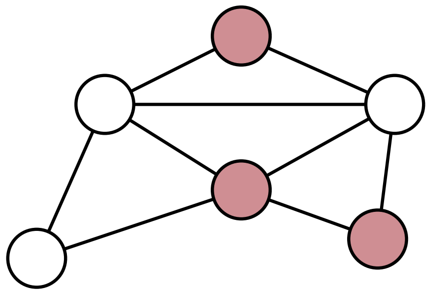
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge

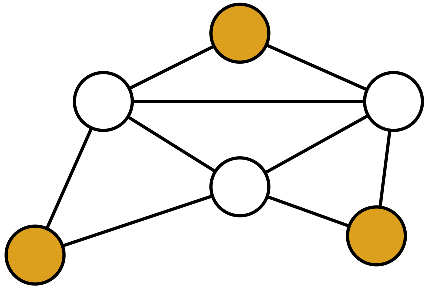


Keine unabhängige Menge

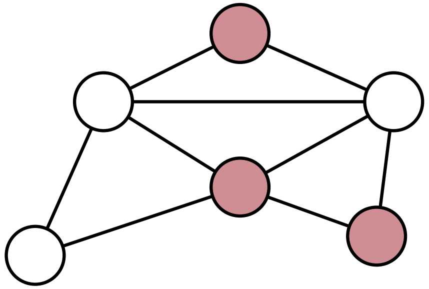
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem Unabhängige Menge:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



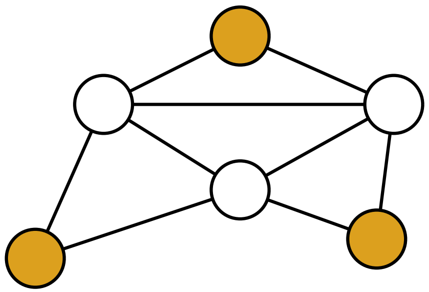
Keine unabhängige Menge

1. Schritt: Unabhängige Menge liegt in NP.

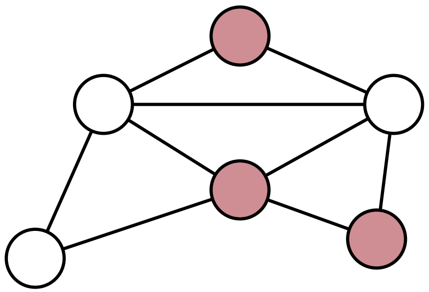
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

1. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE liegt in NP.

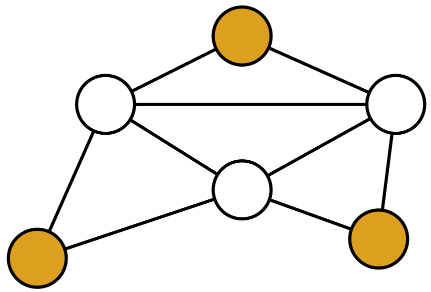
- Orakel rät Knotenmenge V'.
- Überprüfe, ob V' unabhängige Menge von G ist mit $k \leq |V'|$.
  - $|V'| \geq k$.
  - V' sind Knoten aus V.
  - Es gibt keine zwei Knoten $u, v \in V'$ mit $\{u, v\} \in E$.

Laufzeit $\mathcal{O}(|V|^2)$

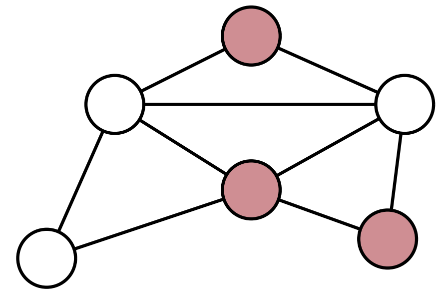
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem Unabhängige Menge:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge

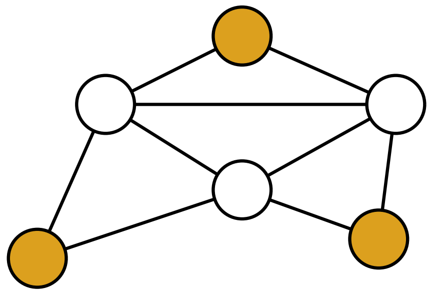


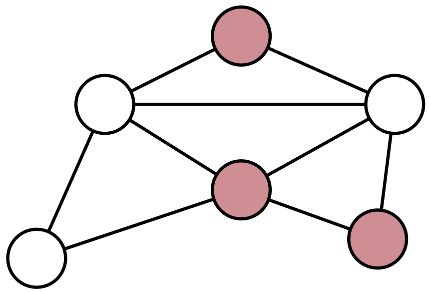
Keine unabhängige Menge

2. Schritt: Unabhängige Menge ist NP-schwer.

Unabhängige Menge

Problem Unabhängige Menge:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.


Unabhängige Menge


Keine unabhängige Menge

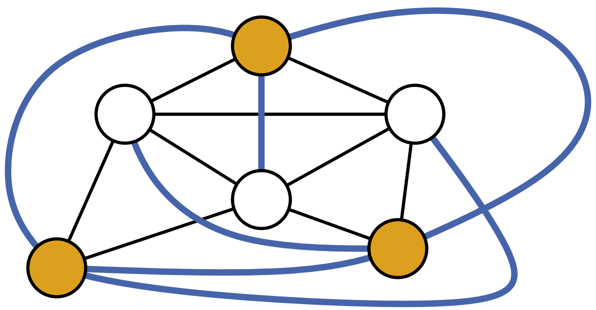
2. Schritt: Unabhängige Menge ist NP-schwer.

Problem Clique:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Clique C in G mit $|C| \geq k$?
Hinweis: $C \subseteq V$ heißt *Clique*, falls für jedes Paar $u, v \in C$ die Kante $\{u, v\} \in E$ existiert.

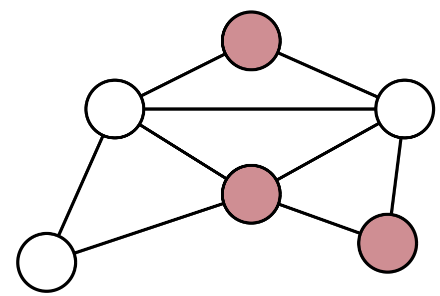
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem Unabhängige Menge:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

2. Schritt: Unabhängige Menge ist NP-schwer. Clique $\propto$ Unabhängige Menge

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von Clique.

Erstelle Komplementgraph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$

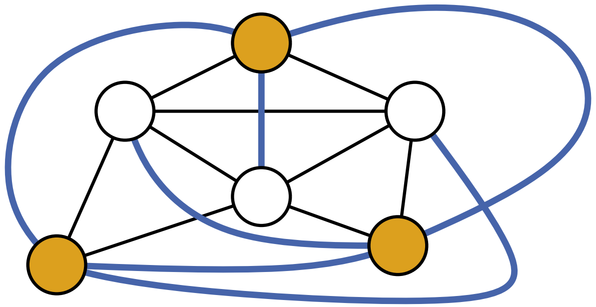
Instanz für Unabhängige Menge ist $I' = (\overline{G}, k)$

Kopieren des Graphen + $\overline{E}$ erstellen $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(|V|^2)$

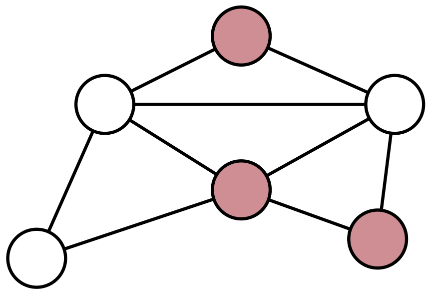
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

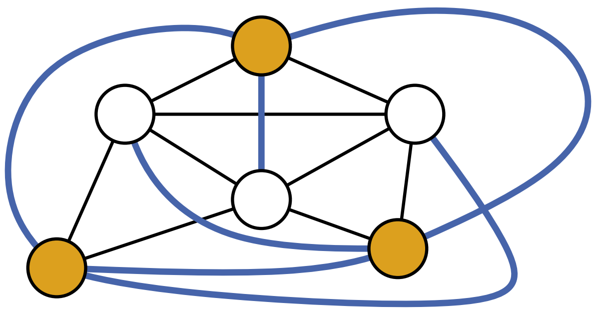
2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist NP-schwer.

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat unabhängige Menge V' mit $|V'| \geq k$

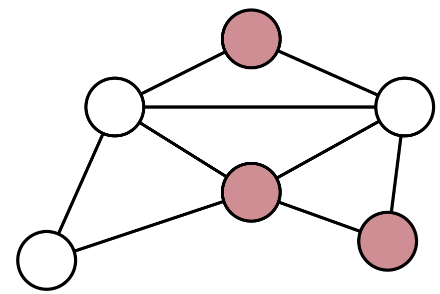
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist NP-schwer.

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat unabhängige Menge V' mit $|V'| \geq k$

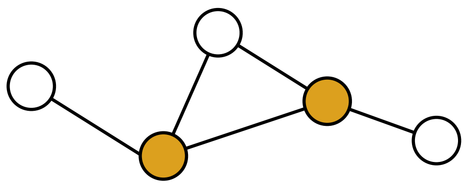
„$\Rightarrow$" Knoten aus C sind in $\overline{G}$ nicht miteinander verbunden $\rightarrow$ C ist unabhängige Menge in $\overline{G}$ mit $|C| \geq k$

„$\Leftarrow$" Knoten aus V' sind in G miteinander verbunden $\rightarrow$ V' ist Clique in G mit $V' \geq k$

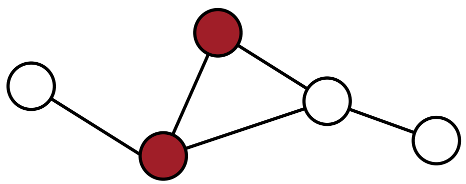
KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-vollständig

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



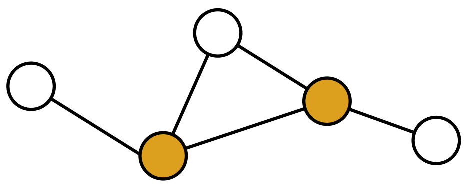
Knotenüberdeckung



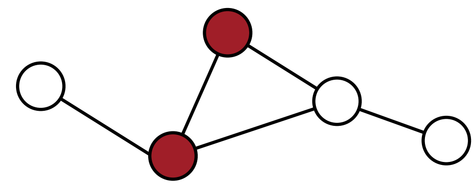
Keine Knotenüberdeckung

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



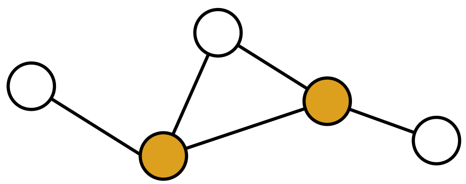
Keine Knotenüberdeckung

1. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG liegt in NP.

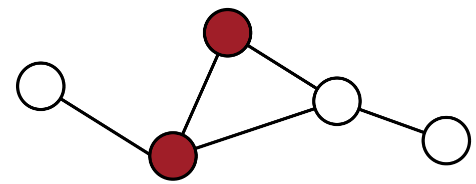
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik
Karlsruher Institut für Technologie

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

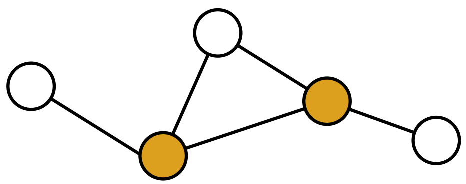
1. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG liegt in NP.

- Orakel rät Knotenmenge V'.
- Überprüfe, ob V' Knotenüberdeckung von G ist mit $|V'| \leq k$.
  - $|V'| \leq k$.
  - V' sind Knoten aus V.
  - Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.

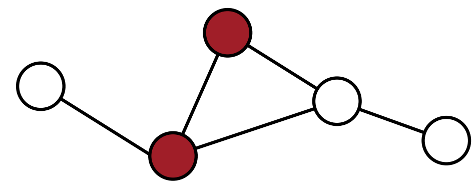
Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung

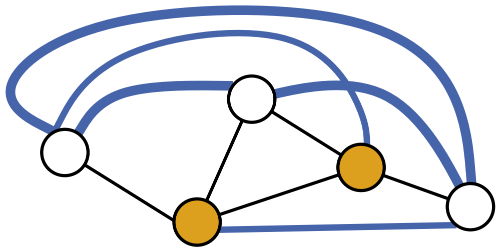


Keine Knotenüberdeckung

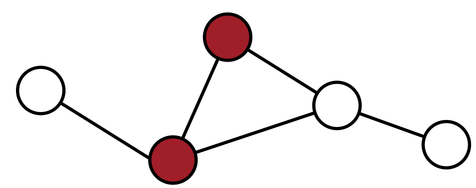
2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



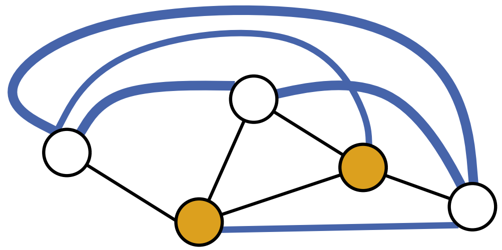
Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

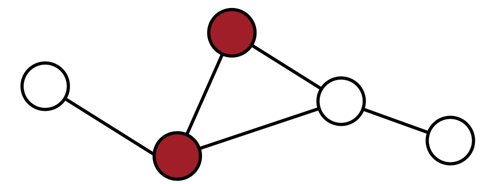
Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Knotenüberdeckung

Problem Knotenüberdeckung:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: Knotenüberdeckung ist NP-schwer. Clique $\propto$ Knotenüberdeckung

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Beweis:

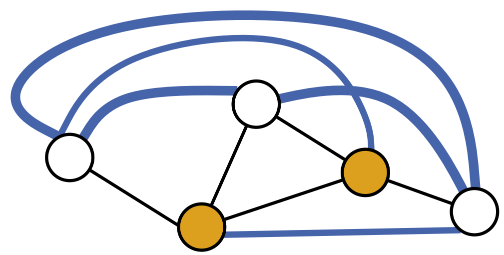
„$\Rightarrow$" Angenommen, es gibt $\{u, v\} \in \overline{E}$ mit $u \notin V'$ und $v \notin V'$.

Es gilt also $u \in C$ und $v \in C$. $\Rightarrow$ $\{u, v\} \in E$, weil C Clique von G Def. $\overline{G}$

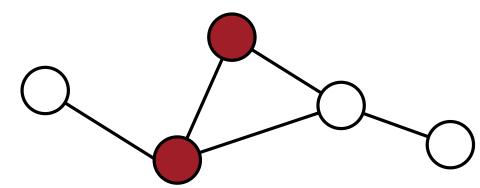
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Beweis:

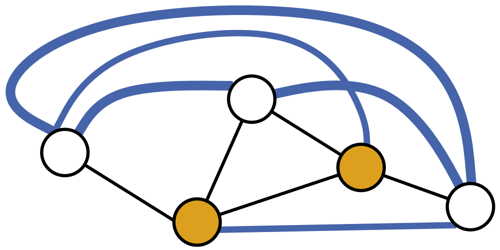
„$\Rightarrow$“ Angenommen, es gibt $\{u, v\} \in \overline{E}$ mit $u \notin V'$ und $v \notin V'$.
Es gilt also $u \in C$ und $v \in C$. $\Rightarrow$ $\{u, v\} \in E$, weil C Clique von G ↯ Def. $\overline{G}$

„$\Leftarrow$“ Seien $u, v \in V \setminus V'$. Es gibt keine Kante $\{u, v\} \in \overline{E}$, sonst ist V' keine Knotenüb.
Damit gibt es die Kante $\{u, v\}$ in G.

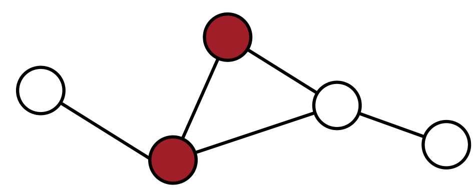
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von CLIQUE.

Erstelle Komplementgraph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$

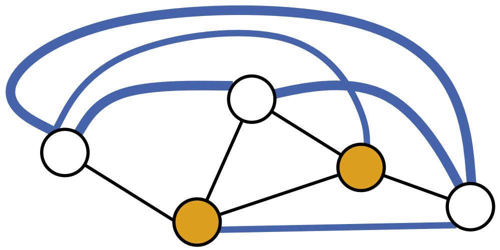
Instanz für KNOTENÜBERDECKUNG ist $I' = (\overline{G}, |V| - k)$

Kopieren des Graphen + $\overline{E}$ erstellen $\rightarrow$ Laufzeit $O(|V|^2)$

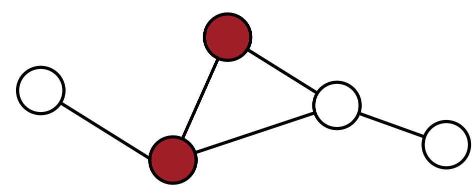
Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat Knotenüberdeckung V' mit $|V'| \leq |V| - k$

Korrektheit folgt direkt aus Lemma.

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

MENGENÜBERDECKUNG ist NP-vollständig

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

Beispiel: $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S_1 = \{1, 2, 3\}$ $\quad S_2 = \{2, 4\}$ $\quad S_3 = \{3, 4\}$ $\quad S_4 = \{4, 5\}$

k=4: $\mathcal{U} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

k=2: $\mathcal{U} = S_1 \cup S_4$

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \dots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

1. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG liegt in NP.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

1. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG liegt in NP.

- Orakel rät Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$.
- Überprüfe:
  - Nicht zu viele Zahlen: $\ell \leq k$
  - Zahlen im richtigen Zahlenbereich: $1 \leq i_j \leq n$ für alle $1 \leq j \leq \ell$
  - $\bigcup_{j=1}^{\ell} S_{i_j} = \mathcal{U}$

In polynomieller Zeit berechenbar.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

2. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG ist NP-schwer.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \dots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

2. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG ist NP-schwer.

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Problem Mengenüberdeckung:
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem Knotenüberdeckung für die Reduktion.

2. Schritt: Mengenüberdeckung ist NP-schwer.

Reduktion: Knotenüberdeckung auf Mengenüberdeckung

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von Knotenüberdeckung mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Rightarrow$“ G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$.

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Rightarrow$“ G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$.

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Karlsruher Institut für Technologie

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Rightarrow$“ G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$.

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Betrachte Kante $e \in E = \mathcal{U}$. Es gibt Knoten v in V', sodass e inzident zu v ist.

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Rightarrow$“ G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$.

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Betrachte Kante $e \in E = \mathcal{U}$. Es gibt Knoten v in V', sodass e inzident zu v ist.

Sei i der Index von v. Somit enthält S_i die Kante e.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$“ Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$“ Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C. Es gilt $|V'| \leq k$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C. Es gilt $|V'| \leq k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C. Es gilt $|V'| \leq k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Da C Mengenüberdeckung von $\mathcal{U}$ ist, gibt es $i \in C$ mit $e \in S_i$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$.
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Lasse k unverändert.

„$\Leftarrow$“ Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C. Es gilt $|V'| \leq k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Da C Mengenüberdeckung von $\mathcal{U}$ ist, gibt es $i \in C$ mit $e \in S_i$.

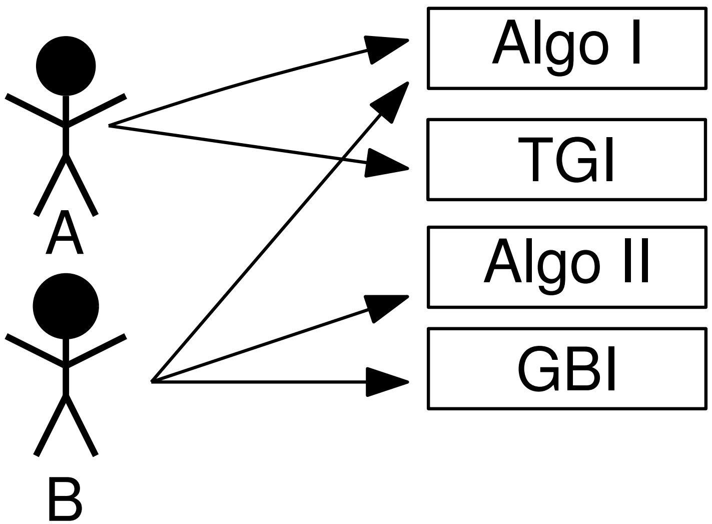
Nach Definition ist v_i inzident zu e und $v_i \in V'$ $\quad \Rightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung.

KLAUSURPLAN ist NP-vollständig

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Beispiel:



	Montag	Dienst
1. Block		
2. Block		
3. Block		
4. Block		
. . .		

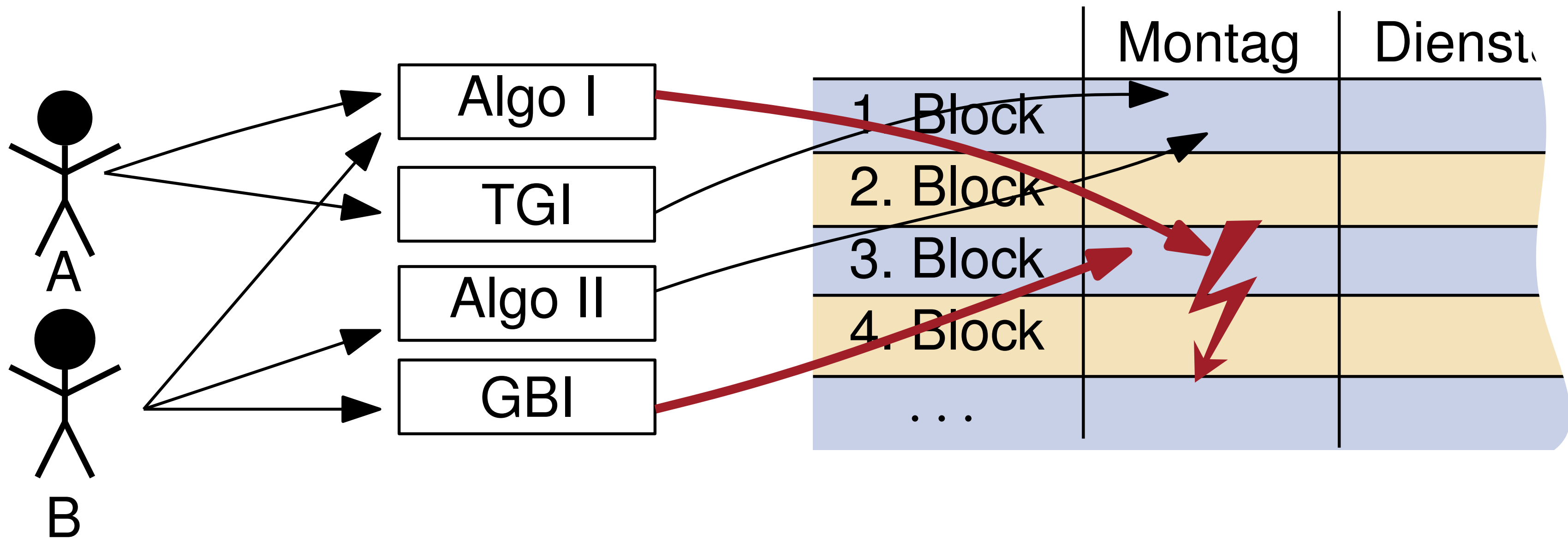
Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN:

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

Beispiel:



Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN:

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN:

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

1. Schritt: Zeige, dass Klausurplan in NP liegt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN:

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

1. Schritt: Zeige, dass Klausurplan in NP liegt.

- Orakel rät Zuweisung der Klausuren.
- Überprüfe:
  - Zuweisung ist gültig.
  - Berechne Konflikte in Zeit $\mathcal{O}(|S||K^2|)$.
  - Überprüfe, dass Anzahl Konflikte $\leq k$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN:

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

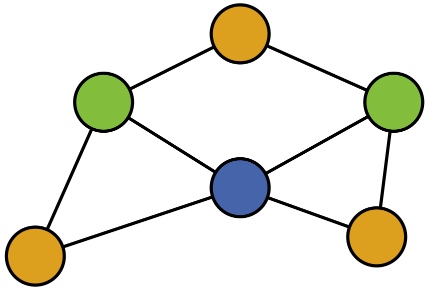
2. Schritt: Zeige, dass KLAUSURPLAN NP-schwer ist.

3COLOR $\propto$ KLAUSURPLAN

Problem 3COLOR:

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und Parameter k

Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens k Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?



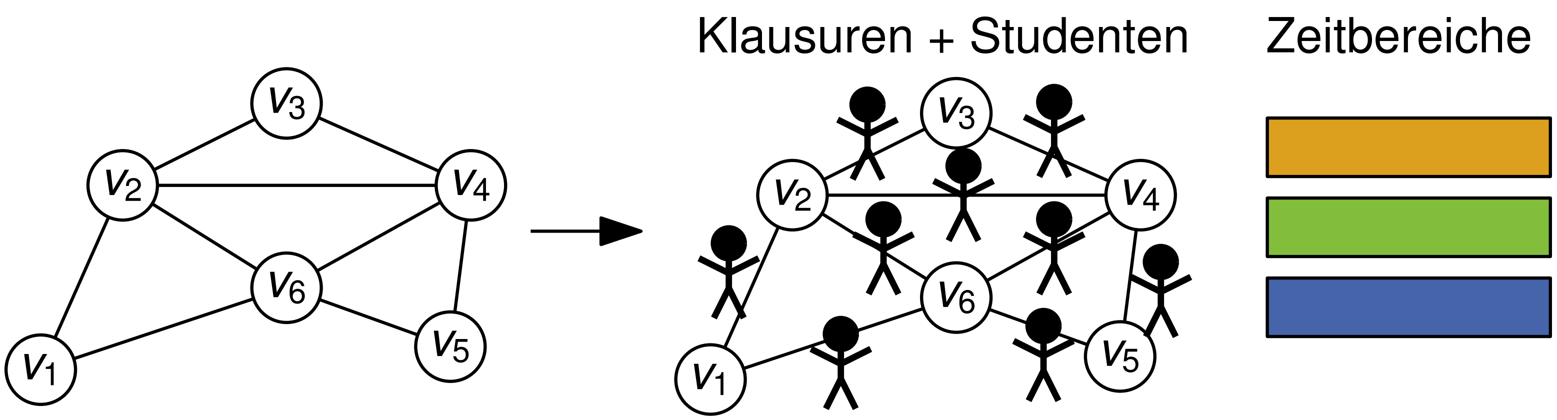
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.



Problem 3COLOR:
Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens 3 Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Rightarrow$“ Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3-färbbar.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Rightarrow$“ Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3-färbbar.

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3Color.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Rightarrow$“ Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3-färbbar.

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Rightarrow$“ Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3-färbbar.

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Studenten entsprechen genau diesen Kanten.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Rightarrow$“ Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3-färbbar.

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Studenten entsprechen genau diesen Kanten.

$\rightarrow$ Klausurenplan hat keine Konflikte.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

$\mapsto$ Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.

Jeder Student entspricht einer Kante in G.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

„$\Leftarrow$“ Der konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte.

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

$\rightarrow$ Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.

Jeder Student entspricht einer Kante in G.

$\longrightarrow$ Benachbarte Knoten in G haben unterschiedliche Färbungen.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Reduktionsschemata

Beschränkung eines Problems

- offensichtliche 1-zu-1-Beziehung
- 3SAT $\propto$ 4SAT

Lokales Ersetzen

- Veränderung der lokalen Struktur
- weitestgehend unabhängige Veränderung
- 3SAT $\propto$ MAX2SAT

Komponenten-Design

- Modellierung von Interaktion zwischen Komponenten
- Modelliere z.B. Literale und Klauseln
- 3SAT $\propto$ 3COLOR

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik