# Theoretische Grundlagen der Informatik
# Vorlesung am 10. Dezember 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Letzte Vorlesung

## Pseudopolynomiale Algorithmen

- Laufzeit: poly$(|I|, \mathsf{max}(I))$ — polynomial in $|I|$ und $\mathsf{max}(I)$
- $\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$ — optimal, kein Fehler

## Absolute Approximationsalgorithmen

- Laufzeit: poly$(|I|)$ — polynomial
- $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ — absoluter Fehler
  - $\mathcal{A}(I) \leq \mathrm{OPT}(I) + K$ bei Minimierungsproblem
  - $\mathcal{A}(I) \geq \mathrm{OPT}(I) - K$ bei Maximierungsproblem

## Relative Approximationsalgorithmen

- Laufzeit: poly$(|I|)$ — polynomial
- $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$ bei Minimierungsproblem — relativer Fehler
- $\mathcal{A}(I) \geq \frac{1}{K} \cdot \mathrm{OPT}(I)$ bei Maximierungsproblem

# Definition

**Erinnerung:** $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} & \text{für Minimierungsproblem} \\ \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} & \text{für Maximierungsproblem} \end{cases}$

Zu einem polynomialen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ sei

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, sodass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}.$$

**Beispiel:**

- Angenommen $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I) + 3$ für alle $I$.
- Dann ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = K + 1$ für $\mathrm{OPT}(I) = 3$
  und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = K + \frac{1}{2}$ für $\mathrm{OPT}(I) = 6$, usw.
- Wir haben aber $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} = K$.

# Definition

**Erinnerung:** $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} & \text{für Minimierungsproblem} \\ \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} & \text{für Maximierungsproblem} \end{cases}$

Zu einem polynomialen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ sei

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, sodass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}.$$

**Beispiel:**

- Angenommen $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I) + 3$ für alle $I$.
- Dann ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = K + 1$ für $\mathrm{OPT}(I) = 3$
  und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = K + \frac{1}{2}$ für $\mathrm{OPT}(I) = 6$, usw.
- Wir haben aber $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} = K$.

$$\mathcal{A}(I) \leq \mathrm{OPT}(I) + K \text{ für alle } I \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} = 1$$

**relative Approximation**

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

**absolute Approx.**

$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$

poly$(|I|)$

**relative Approximation**

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

**absolute Approx.**

$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$

poly$(|I|)$

**Klasse $\mathcal{P}$**

$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

**relative Approximation**

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

min-Metric-TSP

**absolute Approx.**

$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$

poly$(|I|)$

**Klasse $\mathcal{P}$**

$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

max-Knapsack

# Metrisches TSP

**Optimalwertproblem min-Metric-TSP**

**Gegeben:** vollständiger Graph $G = (V, E)$,
Gewichtsfunktion $c \colon E \to \mathbb{Q}$
mit $c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$

**Aufgabe:** Minimiere die Länge bezüglich $c$ von einer Tour zu $G$.

**Satz**:
Für das Optimalwertproblem min-Metric-TSP existiert ein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq 2$.

## Bemerkung:

- Es gilt sogar $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq 2$ für alle Instanzen $I$.

# 2-Approximation von min-METRIC-TSP

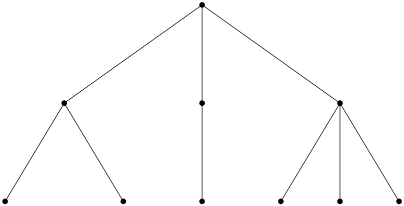
**Beweis.**

- Sei $I = (G = (V, E), c)$ eine Instanz von min-METRIC-TSP.

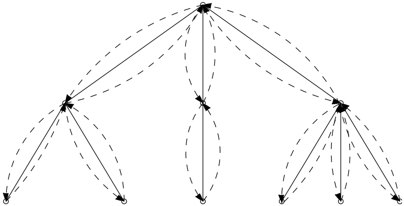
Betrachte folgenden Algorithmus $\mathcal{A}$:

1. Berechne einen *MST* (Minimum Spanning Tree) von $G$.
2. Wähle einen beliebigen Knoten $w$ als Wurzel.
3. Durchlaufe den *MST* in einer Tiefensuche mit Startpunkt $w$.
4. **Dies liefert:** Tour $T$ mit Start- und Endpunkt $w$, die jede Kante genau zweimal durchläuft.
5. Konstruiere entlang $T$ eine abgekürzte Tour $T'$, indem bereits besuchte Knoten übersprungen werden und die Tour $T'$ beim nächsten unbesuchten Knoten fortgesetzt wird.
6. **Ergebnis:** $\mathcal{A}(I) = c(T') = \sum_{e \in T'} c(e)$

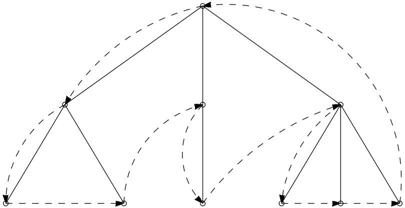
# 2-Approximation von min-METRIC-TSP



(a) MST eines Graphen



(b) Tiefensuch-Tour durch den MST



(c) TSP-Tour als abgekürzte Tiefensuch-Tour

# 2-Approximation von min-METRIC-TSP

**Laufzeit:** $\mathcal{O}(n^2)$ für $n = |V|$. Das ist poly$(|I|)$.

**Approximationsgüte:**

# 2-Approximation von min-METRIC-TSP

**Laufzeit:** $\mathcal{O}(n^2)$ für $n = |V|$. Das ist poly$(|I|)$.

**Approximationsgüte:**

**Bei Minimierungsproblemen**

- Wir wollen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} \leq K$, also $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$.
- Wir brauchen:
  - eine **obere** Schranke für $\mathcal{A}(I)$ „$\mathcal{A}$ ist gut"
  - eine **untere** Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$ „viel besser geht es nicht"

# 2-Approximation von min-METRIC-TSP

**Laufzeit:** $\mathcal{O}(n^2)$ für $n = |V|$. Das ist poly$(|I|)$.

**Approximationsgüte:**

**Bei Minimierungsproblemen**

- Wir wollen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} \leq K$, also $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$.
- Wir brauchen:
  - eine **obere** Schranke für $\mathcal{A}(I)$ „$\mathcal{A}$ ist gut“
  - eine **untere** Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$ „viel besser geht es nicht“

- Eine obere Schranke für $\mathcal{A}(I)$: $\mathcal{A}(I) = c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST)$
- Eine untere Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$: $\mathrm{OPT}(I) \geq c(MST)$

  **Denn:** Eine TSP-Tour kann als ein aufspannender Baum plus eine zusätzliche Kante betrachtet werden. Und *MST* ist ein kürzester aufspannender Baum.

# 2-Approximation von min-METRIC-TSP

**Laufzeit:** $\mathcal{O}(n^2)$ für $n = |V|$. Das ist poly($|I|$).

**Approximationsgüte:**

- Eine obere Schranke für $\mathcal{A}(I)$: $\mathcal{A}(I) = c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST)$
- Eine untere Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$: $\mathrm{OPT}(I) \geq c(MST)$

  **Denn:** Eine TSP-Tour kann als ein aufspannender Baum plus eine zusätzliche Kante betrachtet werden. Und *MST* ist ein kürzester aufspannender Baum.

- Insgesamt erhält man

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq \frac{\text{obere Schranke}}{\text{untere Schranke}} = \frac{2 \cdot c(MST)}{c(MST)} = 2.$$

  Das heißt $\mathcal{A}(I) \leq 2 \cdot c(MST) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}(I)$.

- $\rightsquigarrow \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq 2$.

# Bemerkungen zur Approximierbarkeit

## min-METRIC-TSP

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit gesehen.
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

  $\rightsquigarrow$ Christofides-Algorithmus
- Es gibt keine $\frac{123}{122}$-Approximation mit polynomialer Laufzeit.

# Bemerkungen zur Approximierbarkeit

## min-METRIC-TSP

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit gesehen.
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

  $\rightsquigarrow$ Christofides-Algorithmus
- Es gibt keine $\frac{123}{122}$-Approximation mit polynomialer Laufzeit.

## max-KNAPSACK

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Laufzeit gesehen.

  $\rightsquigarrow$ Greedy-Algorithmus
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

# Bemerkungen zur Approximierbarkeit

## min-Metric-TSP

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit gesehen.
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

  $\rightsquigarrow$ Christofides-Algorithmus
- Es gibt keine $\frac{123}{122}$-Approximation mit polynomialer Laufzeit.

## max-Knapsack

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Laufzeit gesehen.

  $\rightsquigarrow$ Greedy-Algorithmus
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.
- Es gibt eine 1.25-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

# Bemerkungen zur Approximierbarkeit

## min-METRIC-TSP

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit gesehen.
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

  $\rightsquigarrow$ Christofides-Algorithmus
- Es gibt keine $\frac{123}{122}$-Approximation mit polynomialer Laufzeit.

## max-KNAPSACK

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Laufzeit gesehen.

  $\rightsquigarrow$ Greedy-Algorithmus
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.
- Es gibt eine 1.25-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.
- Es gibt eine 1.0001-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

# Bemerkungen zur Approximierbarkeit

## min-METRIC-TSP

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit gesehen.
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

  $\rightsquigarrow$ Christofides-Algorithmus
- Es gibt keine $\frac{123}{122}$-Approximation mit polynomialer Laufzeit.

## max-KNAPSACK

- Wir haben eine 2-Approximation mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Laufzeit gesehen.

  $\rightsquigarrow$ Greedy-Algorithmus
- Es gibt eine 1.5-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.
- Es gibt eine 1.25-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.
- Es gibt eine 1.0001-Approximation mit $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit.

$\rightsquigarrow$ **FPTAS**

# Approximationsschemata

Ein **Approximationsschema** für ein Optimierungsproblem $\Pi$ ist eine Familie von Algorithmen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

- $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$

Ein **PTAS** ist ein Approximationsschema, bei dem

- die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in $|I|$ ist.

Ein **FPTAS** ist ein Approximationsschema, bei dem

- die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in $|I|$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

# Approximationsschemata

Ein **Approximationsschema** für ein Optimierungsproblem $\Pi$ ist eine Familie von Algorithmen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

- $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$ $\quad\rightsquigarrow$ beliebig gute Approximation

Ein **PTAS** ist ein Approximationsschema, bei dem

- die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in $|I|$ ist. $\quad\rightsquigarrow \text{poly}(|I|)$

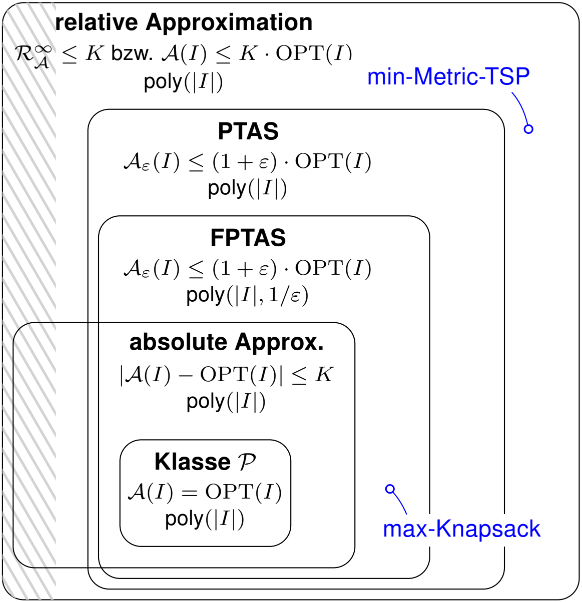
Ein **FPTAS** ist ein Approximationsschema, bei dem

- die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in $|I|$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. $\quad\rightsquigarrow \text{poly}(|I|, 1/\varepsilon)$

- (**F**)**PTAS** steht für (**F**ully) **P**olynomial **T**ime **A**pproximation **S**cheme
- Ein **PTAS** erlaubt Laufzeiten von $\mathcal{O}(n^{1/\varepsilon})$. $\quad n = |I|$

  z.B. $\mathcal{O}(n)$ für 2-Approx., $\mathcal{O}(n^2)$ für 1.5-Approx., $\mathcal{O}(n^4)$ für 1.25-Approx., ...
- Ein **FPTAS** erlaubt Laufzeiten von $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon} \cdot n)$.

  z.B. $\mathcal{O}(n)$ für 2-Approx., $\mathcal{O}(n)$ für 1.5-Approx., $\mathcal{O}(n)$ für 1.25-Approx., ...


relative Approximation
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
min-Metric-TSP
PTAS
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
FPTAS
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|, 1/\varepsilon)$
absolute Approx.
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly$(|I|)$
Klasse $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
max-Knapsack

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Optimierungsproblem max-KNAPSACK**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $M$,
eine Gewichtsfunktion $w\colon M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c\colon M \to \mathbb{N}_0$, $W \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe:** Maximiere $c(M')$ für eine Teilmenge $M'$ von $M$
mit $w(M') \leq W$.

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Optimierungsproblem max-KNAPSACK**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $M$,
eine Gewichtsfunktion $w\colon M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c\colon M \to \mathbb{N}_0$, $W \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe:** Maximiere $c(M')$ für eine Teilmenge $M'$ von $M$ mit $w(M') \leq W$.

## Unser Vorgehen:

- Variiere pseudopolynomialen Algorithmus $\mathcal{A}$ aus letzter Vorlesung.
  $\rightsquigarrow$ Laufzeit: $\mathcal{O}(|M| \cdot c(M))$
- Für $\varepsilon > 0$ entwerfe $(1+\varepsilon)$-Approximation $\mathcal{A}_\varepsilon$ wie folgt:
  1. Bei Eingabe $I = (M, w, c, W)$ berechne ein $k$ aus $|I|$, $\max(I)$ und $\varepsilon$.
  2. Skaliere Kostenfunktion $c'(i) = \lfloor c(i)/k \rfloor$.
  3. Berechne $\mathcal{A}$ auf Eingabe $(M, w, c', W)$.
- Beweise: Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon = \text{poly}(|I|, \frac{1}{\varepsilon})$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$.

# Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für max-KNAPSACK

Für $i \in M$, $r \leq c(M)$ berechne

$$w_r^i := \min\{w(M') \mid M' \subseteq \{1, \ldots, i\}, c(M') = r\}.$$

- **Initialisierung**
  Für $i = 1, \ldots, |M|$ setze $w_0^i := 0$.
- **Berechung**
  Für $r = 1, \ldots, c(M)$ und $i = 1, \ldots, |M|$ setze
  $$w_r^i := \min\left\{w_{r-c(i)}^{i-1} + w(i), w_r^{i-1}\right\}.$$
- **Ausgabe** $\mathcal{A}(I) := \max\{r \mid w_r^{|M|} \leq W\} = \mathrm{OPT}(I)$

# Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für max-KNAPSACK

Für $i \in M$, $r \leq c(M)$ berechne

$$w_r^i := \min\{w(M') \mid M' \subseteq \{1, \ldots, i\}, c(M') = r\}.$$

- **Initialisierung**
  Für $i = 1, \ldots, |M|$ setze $w_0^i := 0$.
- **Berechung**
  Für $r = 1, \ldots, c(M)$ und $i = 1, \ldots, |M|$ setze

$$w_r^i := \min\left\{w_{r-c(i)}^{i-1} + w(i), w_r^{i-1}\right\}.$$

- **Ausgabe** $\mathcal{A}(I) := \max\{r \mid w_r^{|M|} \leq W\} = \mathrm{OPT}(I)$

$\rightsquigarrow$ **Laufzeit:** in $\mathcal{O}(|M| \cdot c(M))$.
$\rightsquigarrow$ **Lösung:** optimal, d.h. $\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$.
$\rightsquigarrow$ Optimaler pseudopolynomialer Algorithmus $\mathcal{A}$.

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

- Bezeichne $\mathcal{A}$ den vorigen pseudopolynomialen Algorithmus für KNAPSACK mit Laufzeit $\mathcal{O}(|M| \cdot c(M))$.

**Definiere Algorithmus $\mathcal{A}_\varepsilon$ für $\epsilon > 0$**

1. Bei Eingabe $I = (M, w, c, W)$, berechne
$$c_{\max} := \max\{c(i) \mid i \in M\} \quad \text{und} \quad k := \frac{c_{\max}}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \cdot |M|} .$$
2. Betrachte die skalierte Instanz $I_k$ mit $c'(i) := \left\lfloor \frac{c(i)}{k} \right\rfloor$ für alle $i \in M$.
3. Berechne $\mathcal{A}$ mit Eingabe $I_k = (M, w, c', W)$.

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

- Bezeichne $\mathcal{A}$ den vorigen pseudopolynomialen Algorithmus für KNAPSACK mit Laufzeit $\mathcal{O}(|M| \cdot c(M))$.

**Definiere Algorithmus $\mathcal{A}_\varepsilon$ für $\epsilon > 0$**

1. Bei Eingabe $I = (M, w, c, W)$, berechne

$$c_{\max} := \max\{c(i) \mid i \in M\} \quad \text{und} \quad k := \frac{c_{\max}}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \cdot |M|}.$$

2. Betrachte die skalierte Instanz $I_k$ mit $c'(i) := \left\lfloor \frac{c(i)}{k} \right\rfloor$ für alle $i \in M$.
3. Berechne $\mathcal{A}$ mit Eingabe $I_k = (M, w, c', W)$.

**Satz**:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Satz**:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

**Beweis:**

Die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist $\mathcal{O}(|M| \cdot c'(M))$, wobei

$$c'(M) = \sum_{i=1}^{|M|} \left\lfloor \frac{c(i)}{k} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{|M|} \frac{c_i}{k} \leq |M| \cdot \frac{c_{\max}}{k} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) |M|^2.$$

Also ist die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ in $\mathcal{O}(|M|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$.

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

Karlsruher Institut für Technologie

**Satz:**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

Für die Abschätzung $\mathrm{OPT}(I) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$.

**Bei Maximierungsproblemen**

- Wir wollen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} \leq K$, also $\mathcal{A}(I) \geq \frac{1}{K} \cdot \mathrm{OPT}(I)$.
- Wir brauchen:
  - eine **untere** Schranke für $\mathcal{A}(I)$ „$\mathcal{A}$ ist gut“
  - eine **obere** Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$ „viel besser geht es nicht“

# Ein FPTAS für max-Knapsack

**Satz:**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-Knapsack.

Für die Abschätzung $\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$.

**Bei Maximierungsproblemen**

- Wir wollen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} \leq K$, also $\mathcal{A}(I) \geq \frac{1}{K} \cdot \mathrm{OPT}(I)$.
- Wir brauchen:
  - eine **untere** Schranke für $\mathcal{A}(I)$ „$\mathcal{A}$ ist gut“
  - eine **obere** Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$ „viel besser geht es nicht“

Wenn $M^*$ optimal für $I$, also $\mathrm{OPT}(I) = c(M^*)$, dann

$$\mathrm{OPT}(I_k) \geq c'(M^*) = \sum_{i \in M^*} \left\lfloor \frac{c(i)}{k} \right\rfloor \geq \sum_{i \in M^*} \left( \frac{c(i)}{k} - 1 \right) \geq \frac{c(M^*)}{k} - |M|.$$

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Satz:**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

Für die Abschätzung $\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$.

Wenn $M^*$ optimal für $I$, also $\mathrm{OPT}(I) = c(M^*)$, dann

$$\mathrm{OPT}(I_k) \geq c'(M^*) = \sum_{i \in M^*} \left\lfloor \frac{c(i)}{k} \right\rfloor \geq \sum_{i \in M^*} \left( \frac{c(i)}{k} - 1 \right) \geq \frac{c(M^*)}{k} - |M|.$$

- Eine obere Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq k \cdot \mathcal{A}(I_k) = k \cdot \mathrm{OPT}(I_k) \overset{!}{\geq} c(M^*) - k \cdot |M| = \mathrm{OPT}(I) - k \cdot |M|$$

Also $\boxed{\mathrm{OPT}(I) \leq \mathcal{A}_\varepsilon(I) + k \cdot |M|}$

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Satz:**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

Für die Abschätzung $\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$.

- Eine obere Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq k \cdot \mathcal{A}(I_k) = k \cdot \mathrm{OPT}(I_k) \overset{!}{\geq} c(M^*) - k \cdot |M| = \mathrm{OPT}(I) - k \cdot |M|$$

Also $\boxed{\mathrm{OPT}(I) \leq \mathcal{A}_\varepsilon(I) + k \cdot |M|}$

- Eine untere Schranke für $\mathcal{A}_\varepsilon(I)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq \mathrm{OPT}(I) - k \cdot |M| \geq c_{\max} - k \cdot |M|$$

Mit der Definition von $k$ also $\boxed{\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq k \cdot |M| \cdot (1/\varepsilon)}$

# Ein FPTAS für max-KNAPSACK

**Satz:**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(|I|^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPTAS für max-KNAPSACK.

Für die Abschätzung $\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$.

- Eine obere Schranke für $\mathrm{OPT}(I)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq k \cdot \mathcal{A}(I_k) = k \cdot \mathrm{OPT}(I_k) \overset{!}{\geq} c(M^*) - k \cdot |M| = \mathrm{OPT}(I) - k \cdot |M|$$

Also $\boxed{\mathrm{OPT}(I) \leq \mathcal{A}_\varepsilon(I) + k \cdot |M|}$

- Eine untere Schranke für $\mathcal{A}_\varepsilon(I)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq \mathrm{OPT}(I) - k \cdot |M| \geq c_{\max} - k \cdot |M|$$

Mit der Definition von $k$ also $\boxed{\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq k \cdot |M| \cdot (1/\varepsilon)}$

- Zusammen:

$$\mathrm{OPT}(I) \leq \mathcal{A}_\varepsilon(I) + k \cdot |M| \leq \mathcal{A}_\varepsilon(I) + \varepsilon \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I) = (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(I)$$

## relative Approximation

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

min-Metric-TSP

## PTAS

$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

## FPTAS

$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|, 1/\varepsilon)$

## absolute Approx.

$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$

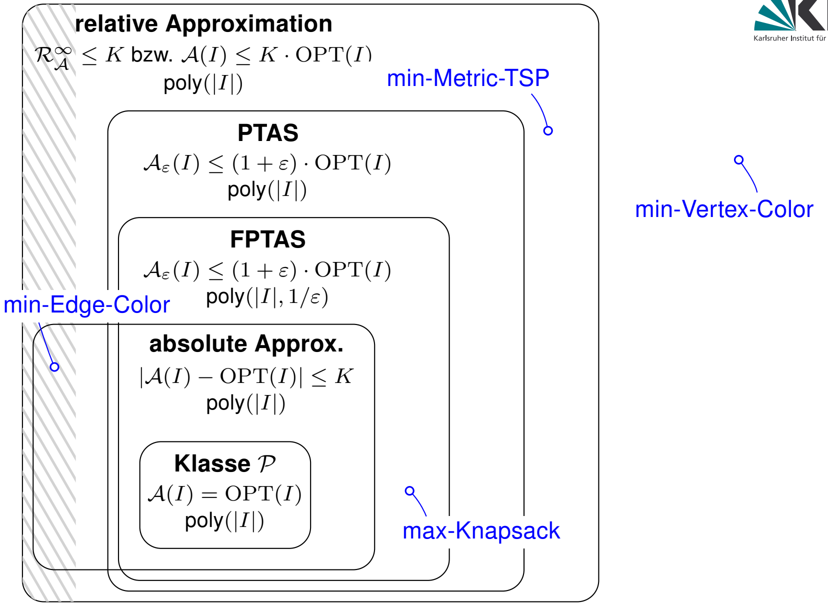
poly$(|I|)$

## Klasse $\mathcal{P}$

$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$

poly$(|I|)$

max-Knapsack


relative Approximation
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
PTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
FPTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|, 1/\varepsilon$)
absolute Approx.
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly($|I|$)
Klasse $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
min-Metric-TSP
min-Vertex-Color
min-Edge-Color
max-Knapsack

# min-VERTEX-COLOR und min-EDGE-COLOR

**Optimierungsproblem min-VERTEX-COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$

**Aufgabe:** Färbe die Knoten in $V$ mit möglichst wenig Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen.

**Optimierungsproblem min-EDGE-COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$

**Aufgabe:** Färbe die Kanten in $E$ mit möglichst wenig Farben, sodass je zwei adjazente Kanten verschiedene Farben besitzen.

Beide Entscheidungsprobleme „höchstens drei Farben“ sind $\mathcal{NP}$-schwer.

# Nicht-Existenz eines FPTAS

**Optimierungsproblem min-VERTEX-COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$

**Aufgabe:** Färbe die Knoten in $V$ mit möglichst wenig Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen.

**Satz**:
Sei $\Pi$ ein $\mathcal{NP}$-schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom $q$ mit $\mathrm{OPT}(I) < q(|I|)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPTAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für $\Pi$.

# Nicht-Existenz eines FPTAS

**Satz**:
Sei $\Pi$ ein $\mathcal{NP}$-schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom $q$ mit $\mathrm{OPT}(I) < q(|I|)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPTAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für $\Pi$.

**Beweis:**

- O.B.d.A. sei $\Pi$ ein Maximierungsproblem.
- Angenommen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ sei ein FPTAS für $\Pi$.
- Wir konstruieren optimalen, polynomialen Algorithmus $\mathcal{A}$ für $\Pi$:
  1. Bei Eingabe $I \in D_\Pi$ berechne ein $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{q(|I|)}$.
  2. Gebe $\mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I)$ zurück. (Berechne Algorithmus $\mathcal{A}_{\varepsilon_0}$ auf Eingabe $I$.)
- Laufzeit von $\mathcal{A}_{\varepsilon_0}$ ist $\mathrm{poly}(|I|, \frac{1}{\varepsilon_0}) = \mathrm{poly}(|I|)$, da $\frac{1}{\varepsilon_0} = q(|I|) = \mathrm{poly}(|I|)$.

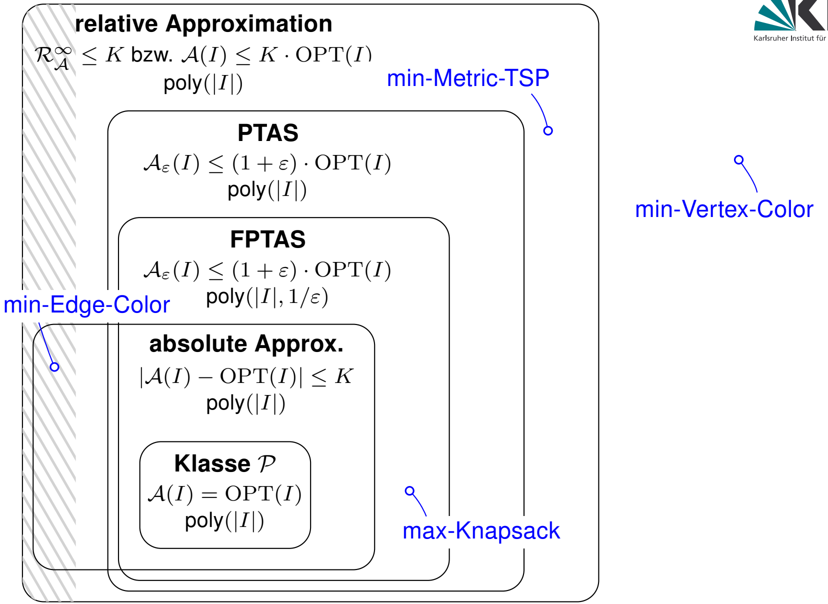
# Nicht-Existenz eines FPTAS

**Satz**:
Sei $\Pi$ ein $\mathcal{NP}$-schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom $q$ mit $\mathrm{OPT}(I) < q(|I|)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPTAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für $\Pi$.

- Für die Güte beobachte: $\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\varepsilon_0)\mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I)$ und
  $\mathrm{OPT}(I) < q(|I|) = \frac{1}{\varepsilon_0}$.
- Also gilt $0 \leq \mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \mathrm{OPT}(I) < 1$.
- Da $\mathrm{OPT}(I), \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \in \mathbb{N}$, ist $\mathrm{OPT}(I) = \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I)$.
- Demnach ist $\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) = \mathrm{OPT}(I)$, also $\Pi \in \mathcal{P}$.
- Da $\Pi$ $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.


relative Approximation
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
PTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
FPTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|, 1/\varepsilon$)
absolute Approx.
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly($|I|$)
Klasse $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
min-Metric-TSP
min-Vertex-Color
min-Edge-Color
max-Knapsack

# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR

**Optimierungsproblem min-VERTEX-COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$

**Aufgabe:** Färbe die Knoten in $V$ mit möglichst wenig Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen.

**Satz**:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für min-VERTEX-COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR

**Optimierungsproblem min-VERTEX-COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$

**Aufgabe:** Färbe die Knoten in $V$ mit möglichst wenig Farben, sodass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen.

**Satz**:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für min-VERTEX-COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

**Beweis:**

- Angenommen, es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für min-VERTEX-COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Wir benutzen $\mathcal{A}$, um das Entscheidungsproblem 3COLOR zu lösen.
- Da 3COLOR $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

# Approximierbarkeit von min-Vertex-Color

Zu zwei Graphen

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ und } G_2 = (V_2, E_2)$$

sei

$$G := (V, E) := G_1[G_2]$$

definiert durch

$$V := V_1 \times V_2$$

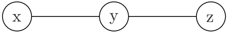
und

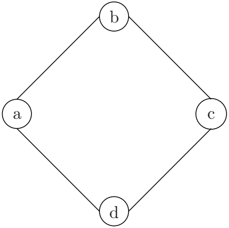
$$E := \left\{ \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{entweder } \{u_1, v_1\} \in E_1 \text{, oder} \\ u_1 = v_1 \text{ und } \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{array} \right\}.$$

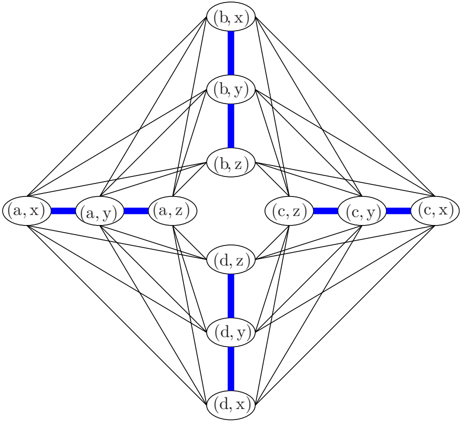
**Anschaulich:**

- Jeder Knoten aus $G_1$ wird durch eine Kopie von $G_2$ ersetzt.
- Jede Kante aus $E_1$ durch einen vollständig bipartiten Graphen zwischen den entsprechenden Kopien.

# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR



# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

- Angenommen, es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für min-VERTEX-COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen $G$ mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N_0$.

# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR

Karlsruher Institut für Technologie

- Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen $G$ mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N_0$.
- Sei also $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von 3COLOR.
- Dann definiere $G^* := K_{N_0}[G]$, wobei $K_{N_0}$ der vollständige Graph mit $N_0$ Knoten ist.
- Dann gilt: $\mathrm{OPT}(G^*) = N_0 \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq N_0$.

**Fallunterscheidung:**

- Falls $G$ Ja-Instanz (also dreifärbbar) ist, gilt:

$$\mathcal{A}(G^*) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G^*) = \frac{4}{3} \cdot N_0 \cdot \mathrm{OPT}(G) \leq \frac{4}{3} \cdot N_0 \cdot 3 = 4N_0.$$

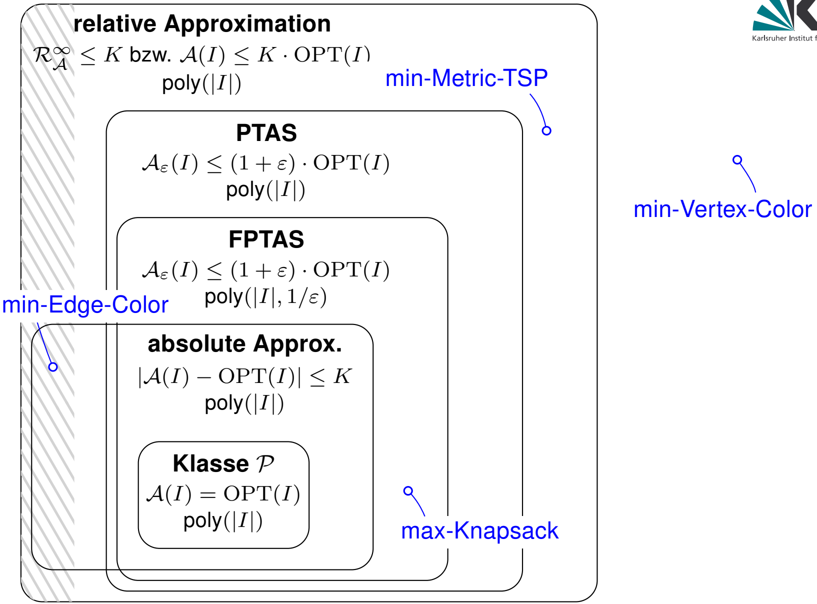
- Andererseits, falls $G$ Nein-Instanz (also nicht dreifärbbar) ist, gilt

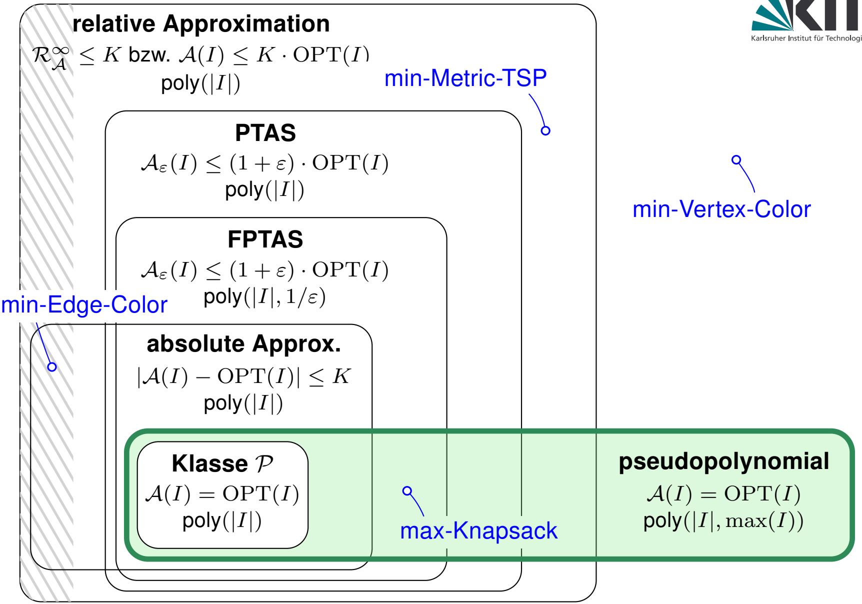
$$\mathcal{A}(G^*) \geq \mathrm{OPT}(G^*) = N_0 \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq 4N_0.$$

**Fazit:** $G$ ist Ja-Instanz (dreifärbbar) genau dann, wenn $\mathcal{A}(G^*) < 4N_0$.

# Approximierbarkeit von min-VERTEX-COLOR

- Die Größe von $G^*$ ist polynomial in der Größe von $G$.
- Also kann $G^*$ in polynomialer Zeit konstruiert werden.
- Damit ist die Anwendung von $\mathcal{A}$ auf $G^*$ polynomial in der Größe von $G$.
- Also haben wir einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von 3COLOR konstruiert.
- Da 3COLOR $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt damit, dass $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.


relative Approximation
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
min-Metric-TSP
PTAS
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
min-Vertex-Color
FPTAS
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|, 1/\varepsilon$)
min-Edge-Color
absolute Approx.
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly($|I|$)
Klasse $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
max-Knapsack



**relative Approximation**
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
min-Metric-TSP
**PTAS**
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
min-Vertex-Color
**FPTAS**
$\mathcal{A}_{\varepsilon}(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|, 1/\varepsilon)$
min-Edge-Color
**absolute Approx.**
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly$(|I|)$
**Klasse $\mathcal{P}$**
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|)$
max-Knapsack
**pseudopolynomial**
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly$(|I|, \max(I))$

# Ein allgemeines Resultat

**Satz**:
Sei $\Pi$ ein Optimierungsproblem, für das gilt:

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$,
- es existiert ein Polynom $q$ mit $\mathrm{OPT}(I) \leq q(|I| + \max(I))$.

Falls $\Pi$ ein FPTAS hat, so hat es einen pseudopolynomialen optimalen Algorithmus.

# Ende des Kapitels

- Wir haben heute das Kapitel **Komplexitätstheorie** abgeschlossen.
- Wir werden aber nochmal über Turing-Maschinen sprechen.

**Testen Sie sich:**
Können Sie mit folgenden Begriffen etwas anfangen?

CLIQUE polynomiale Transformation 3SAT

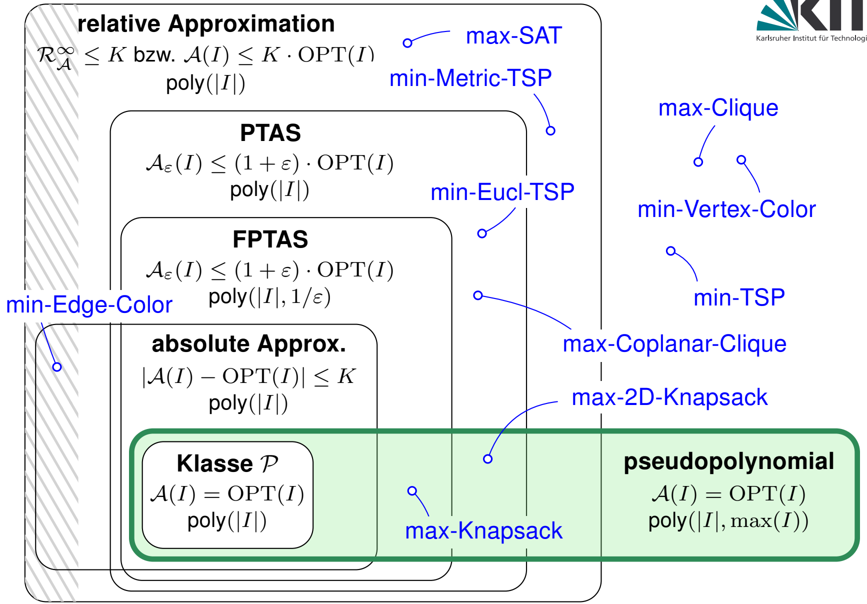
Zeitkomplexitätsfunktion Turing-Maschine Approximation

$\mathcal{NP}$ Orakel Eingabekodierung

Optimierungsproblem

Instanz pseudopolynomial $\mathcal{NP}$-vollständig (F)PTAS

Entscheidungsproblem $\mathcal{P}$ Nichtdeterminismus



relative Approximation
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq K$ bzw. $\mathcal{A}(I) \leq K \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
PTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
FPTAS
$\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|, 1/\varepsilon$)
absolute Approx.
$|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$
poly($|I|$)
Klasse $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|$)
pseudopolynomial
$\mathcal{A}(I) = \mathrm{OPT}(I)$
poly($|I|, \max(I)$)
max-SAT
min-Metric-TSP
max-Clique
min-Vertex-Color
min-Eucl-TSP
min-TSP
min-Edge-Color
max-Coplanar-Clique
max-2D-Knapsack
max-Knapsack