Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 12. November 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Letzte Vorlesung

Bearbeitet eine TM $\mathcal{M}$ eine Eingabe w, so gibt es drei Möglichkeiten:

1. $\mathcal{M}$ „läuft“ in einen Zustand in F.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ akzeptiert w

2. $\mathcal{M}$ „läuft“ in einen Übergang $\delta(q, a) = (q, a, N)$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ lehnt w ab

3. $\mathcal{M}$ „läuft“ unendlich lange.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}$ stoppt nicht

Für eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und Sprache L definieren wir:

$\mathcal{M}$ **hält**	**1.** oder **2.**	
$\mathcal{M}$ **akzeptiert** L (L semi-entscheidbar)	$\forall w \in L$: **1.**	$\forall w \notin L$: **2.** oder **3.**
$\mathcal{M}$ **entscheidet** L (L entscheidbar)	$\forall w \in L$: **1.**	$\forall w \notin L$: **2.**

Die Universelle Sprache

Die **universelle Sprache** L_u über $\{0,1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv, für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Wir zeigen, dass L_u eine Verallgemeinerung von L_d^c ist.
- Wir nehmen an, dass es eine TM gibt, die L_u entscheidet.
- Dann zeigen wir, dass wir damit auch L_d^c entscheiden können.

Wir gehen wie folgt vor:

- Berechne das i, für das $w = w_i$.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für L_u auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle w_i$ an.

Wäre L_u entscheidbar, so auch L_d^c im Widerspruch zum letzten Korollar.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Bemerkung:
Die Begriffe entscheidbar und semi-entscheidbar unterscheiden sich tatsächlich.

Satz von Rice – Motivation

- Wir haben bisher gezeigt, dass wir kein Programm schreiben können, das für ein Turing-Maschinen-Programm $\langle \mathcal{M} \rangle$ und eine Eingabe w entscheidet, ob $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w hält.
- Wir werden im Folgenden sehen, dass wir aus einem Programm im Allgemeinen keine nicht-trivialen Eigenschaften der von dem Programm realisierten Funktion ableiten können.

Satz von Rice

Satz (Satz von Rice):
Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Satz von Rice

Satz (Satz von Rice):
Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Beweisskizze:

- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon := \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M}$ hält auf der Eingabe $\varepsilon\}$ ist unentscheidbar.
- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon^C$ ist unentscheidbar.
- Führe den Widerspruchsbeweis für die Unentscheidbarkeit von $L(S)$:
- Konstruiere TM für $\mathcal{H}_\varepsilon^C$ unter Benutzung von TM $\mathcal{M}'$ für $L(S)$.

Bemerkungen zum Satz von Rice

Der Satz von Rice hat weitreichende Konsequenzen:

> Es ist für Programme nicht entscheidbar, ob die durch sie definierte Sprache endlich, leer, unendlich oder ganz Σ^* ist.

Wir haben hier nur die Unentscheidbarkeit von L_d direkt bewiesen.
Die anderen Beweise folgten dem folgenden Schema:

> Um zu zeigen, dass ein Problem A unentscheidbar ist, zeigen wir, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für A ein bekanntermaßen unentscheidbares Problem B entscheiden kann. Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

$$K = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1\,0\,1\,1\,1 & 1\,0 \\ \hline 1\,1\,1 & 1\,0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

Das Post'sche Korrespondenzproblem

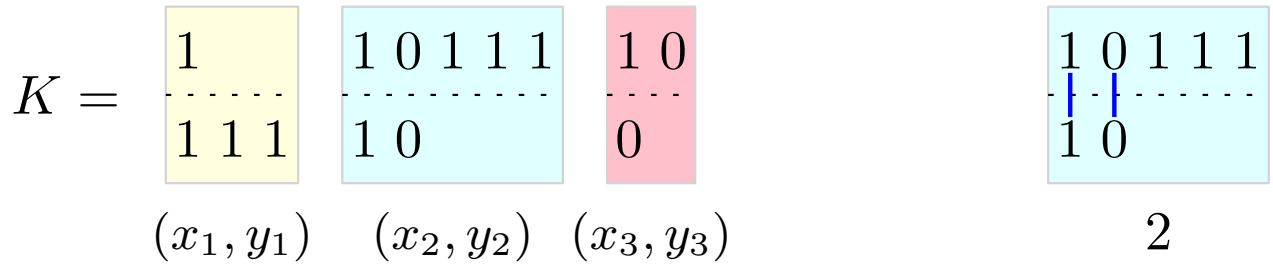
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

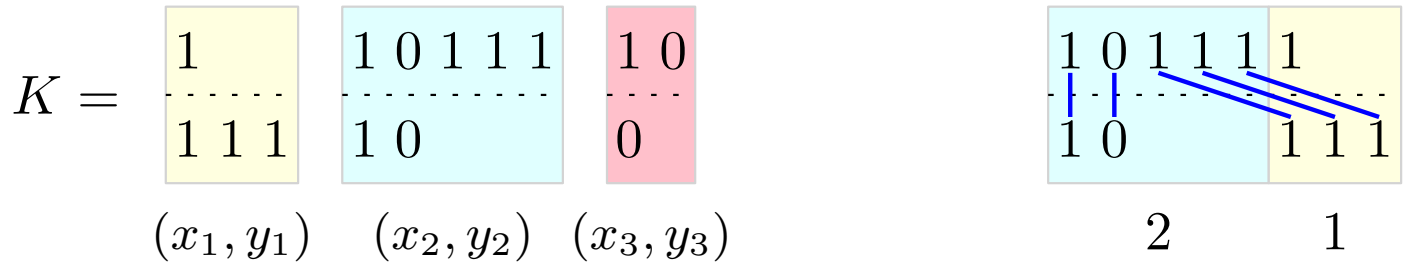
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

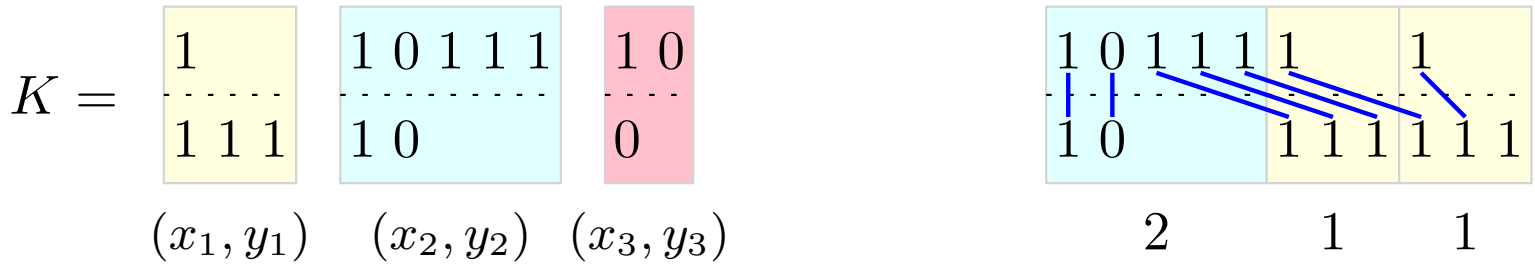
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt: $x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$$K = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1\,0 & 0\,1\,1 & 1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1 & 1\,1 & 0\,1\,1 \\ \hline \end{array}$$

(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$K =$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
1 0	0 1 1	1 0 1
1 0 1	1 1	0 1 1

1
1 0
1 0 1

Das Post'sche Korrespondenzproblem

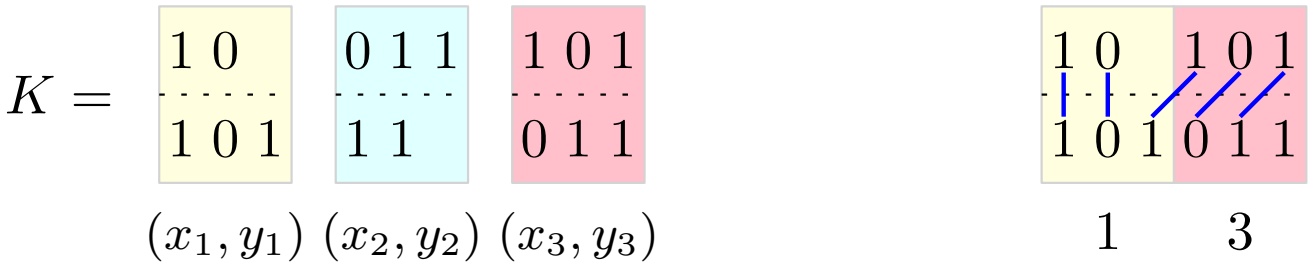
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.



Das Post'sche Korrespondenzproblem

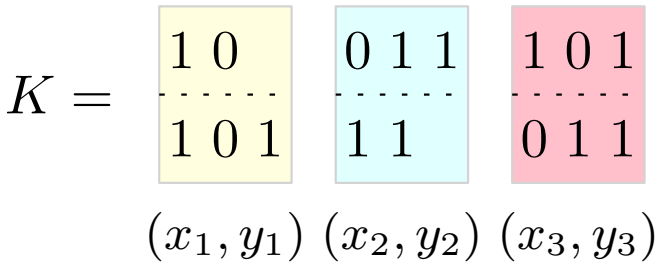
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

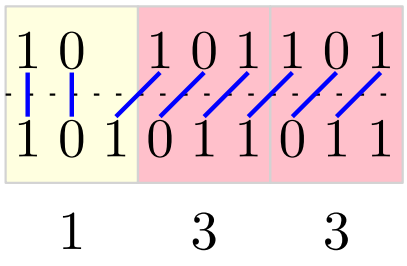
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.





Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$ hat keine Lösung.

$K =$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
1 0	0 1 1	1 0 1
1 0 1	1 1	0 1 1

0 1 1
1 1

2

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$$K = \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} 0\,0\,1 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0\,1 \\ \hline 0\,1\,1 \end{array} & \begin{array}{c} 0\,1 \\ \hline 1\,0\,1 \end{array} & \begin{array}{c} 1\,0 \\ \hline 0\,0\,1 \end{array} \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{array}$$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

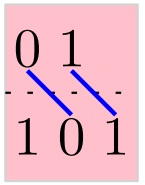
über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$

$K =$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)
0 0 1	0 1	0 1	1 0
0	0 1 1	1 0 1	0 0 1



3

Das Post'sche Korrespondenzproblem

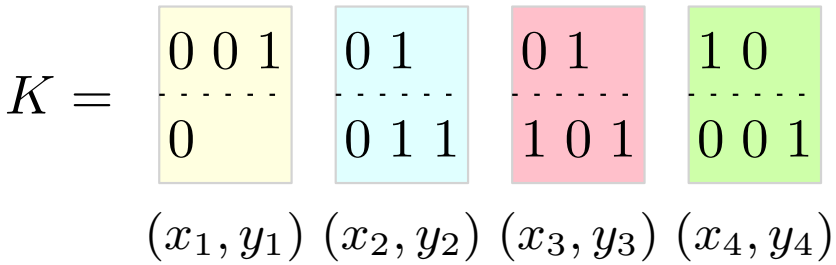
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

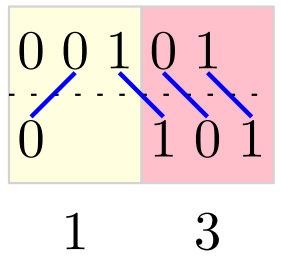
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$





Das Post'sche Korrespondenzproblem

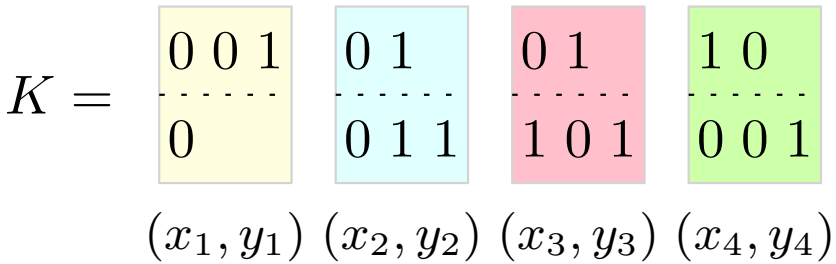
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

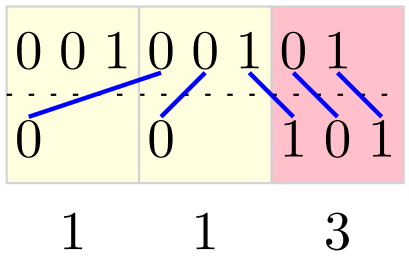
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$





Das Post'sche Korrespondenzproblem

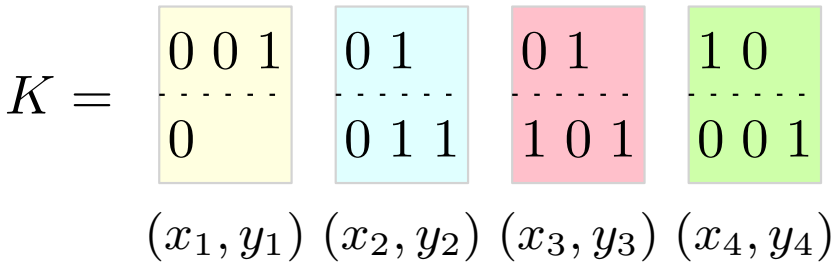
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

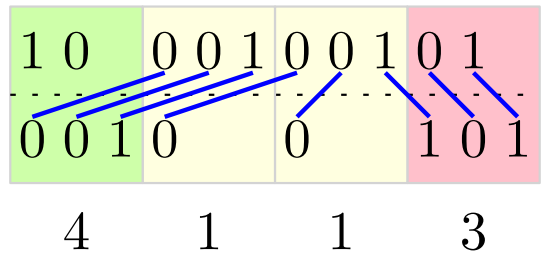
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$





Das Post'sche Korrespondenzproblem

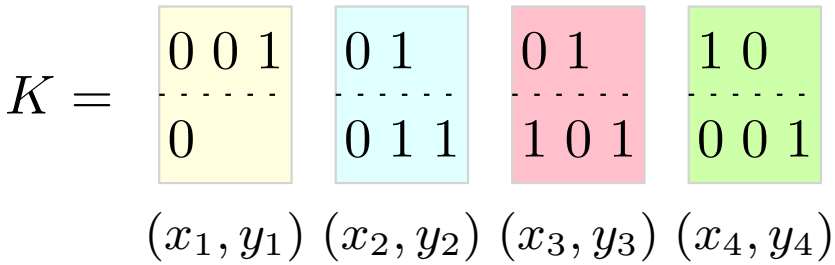
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

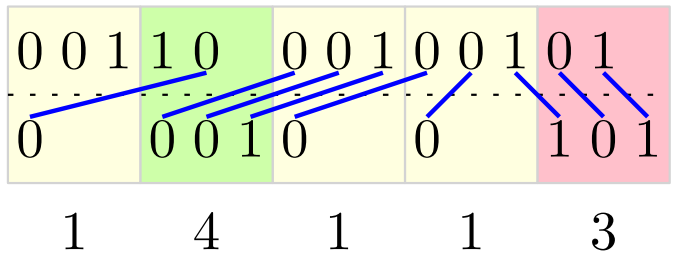
$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$





Das Post'sche Korrespondenzproblem

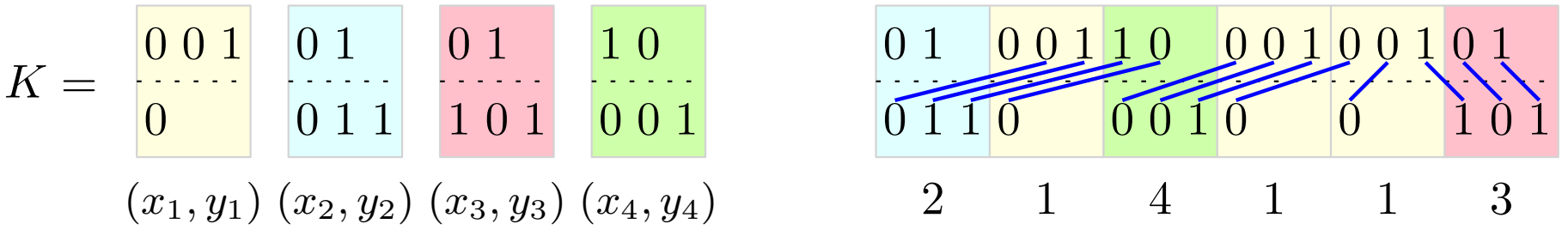
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$



Das Post'sche Korrespondenzproblem

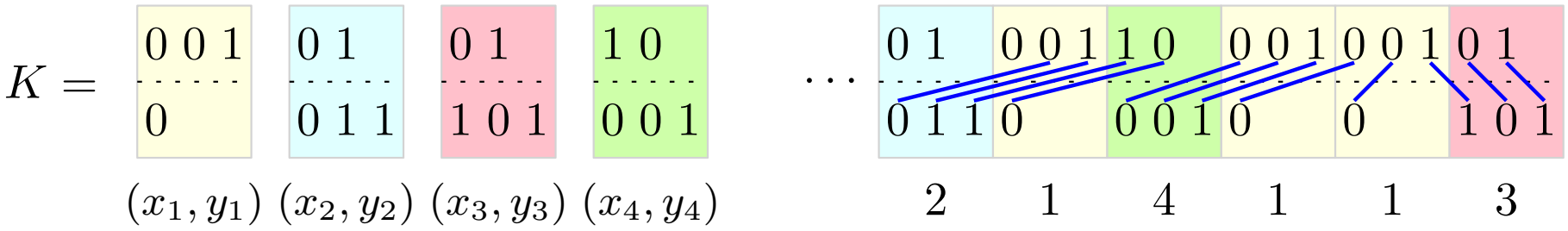
Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Menge von Wortpaaren

$$K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = \{(001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001)\}$
  $\rightsquigarrow$ Die kürzeste Lösung hat Länge 66.



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des PKP):
Das Post'sche Korrespondezproblem ist nicht entscheidbar.

Beweisidee:
Dies kann über die Nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems bewiesen werden.

Eigenschaften von (semi-)entscheidbaren Sprachen

- Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Komplementbildung, Schnitt und Vereinigung.
- Die semi-entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt und Vereinigung, aber nicht unter Komplementbildung.

Satz:
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $L^c = \Sigma^* \setminus L$. Dann gilt

- L entscheidbar $\iff$ L^c entscheidbar.
- L entscheidbar $\iff$ L und L^c semi-entscheidbar.

Beweis: Übung und Tutorien.

Kapitel

- **Komplexitätstheorie**

Komplexitätstheorie

Fragestellung bisher:

- Ist eine Sprache L entscheidbar oder nicht?
- Ist eine Funktion berechenbar oder nicht?
- Benutzung von deterministischen Turing-Maschinen.

In diesem Kapitel:

- Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?
- Betrachtung von nichtdeterministischen Turing-Maschinen.

Frage ($\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$):
Gibt es einen wesentlichen Effizienzgewinn beim Übergang von der deterministischen Turing-Maschine zur nichtdeterministischen Turing-Maschine?

Wie sieht ein Problem aus?

Beispiel: Traveling Salesman Problem (TSP)

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E, c)$, d.h.

- $V := \{1, \ldots, n\}$
- $E := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$
- $c\colon E \to \mathbb{Z}^+$.

Wir betrachten folgende Problemvarianten:

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Wie sieht ein Problem aus?

Wir betrachten folgende Problemvarianten:

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Bemerkung:

- Mit einer Lösung des Optimierungsproblems kann man leicht auch das Optimalwertproblem und das Entscheidungsproblem lösen.
- Mit einer Lösung des Optimalwertproblems kann man leicht auch das Entscheidungsproblem lösen.

Definition: Problem

Ein **Problem** Π ist gegeben durch:

- eine allgemeine Beschreibung aller vorkommenden Parameter;
- eine genaue Beschreibung der Eigenschaften, die die Lösung haben soll.

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Kantengewichtung $c\colon E \to \mathbb{Z}^+$, Zahl k

Lösung: zykl. Permutation $x_1 x_2 \cdots x_n$ von V mit $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\sum_{i=1}^{n-1} c(\{x_i, x_{i+1}\}) \leq k$

Eine **Instanz** I von Π erhalten wir, indem wir die Parameter von Π festlegen. (**Problembeispiel**)

$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}$

$c(\{a, b\}) = c(\{b, d\}) = c(\{b, c\}) = 1, c(\{a, c\}) = 2, c(\{c, d\}) = 4$

Definition: Kodierungsschema

- Wir interessieren uns für die **Laufzeit** von Algorithmen.
- Diese wird in der Größe des Problems gemessen.

Die Größe eines Problems ist abhängig von der Beschreibung oder Kodierung der Instanzen.

- Ein **Kodierungsschema** s ordnet jeder Instanz I eines Problems ein Wort oder eine *Kodierung* $s(I)$ über einem Alphabet Σ zu.

$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}$$
$$c(\{a, b\}) = c(\{b, d\}) = c(\{b, c\}) = 1, c(\{a, c\}) = 2, c(\{c, d\}) = 4$$

$$s(I) = 00|01|10|11 \sqcup 00 * 01|00 * 10|10 * 11|01 * 11|01 * 10 \sqcup 1|2|4|1|1$$
$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, |, \sqcup, *\}$$

Definition: Kodierungsschema

- Wir interessieren uns für die **Laufzeit** von Algorithmen.
- Diese wird in der Größe des Problems gemessen.

Die Größe eines Problems ist abhängig von der Beschreibung oder Kodierung der Instanzen.

- Ein **Kodierungsschema** s ordnet jeder Instanz I eines Problems ein Wort oder eine *Kodierung* $s(I)$ über einem Alphabet Σ zu.

  $s(I) = 00|01|10|11 \sqcup 00 * 01|00 * 10|10 * 11|01 * 11|01 * 10 \sqcup 1|2|4|1|1$

  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, |, \sqcup, *\}$

- Die **Inputlänge** einer Instanz ist die Anzahl der Symbole ihrer Kodierung.

  hier: $|s(I)| = 51$

Kodierungsschema

Es gibt verschiedene Kodierungsschemata für ein bestimmtes Problem.

Beispiel:

- Zahlen können dezimal, binär, unär, usw. kodiert werden.
- Die Inputlänge von 5127 beträgt dann 4 für dezimal, 13 für binär und 5127 für unär.

Wir werden uns auf vernünftige Schemata festlegen:

- Die Kodierung einer Instanz soll keine überflüssigen Informationen enthalten.
- Zahlen sollen binär (oder k-är für $k \neq 1$) kodiert sein.

Kodierungsschema

Dies bedeutet, die Kodierungslänge

- einer ganzen Zahl n ist $\lfloor \log_k |n| + 1 \rfloor + 1 =: \langle n \rangle$
  (eine 1 benötigt man für das Vorzeichen);
- einer rationalen Zahl $r = \frac{p}{q}$ ist $\langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle$;
- eines Vektors $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ist $\langle X \rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$;
- einer Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ist $\langle A \rangle := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle a_{ij} \rangle$.
- eines Graphen $G = (V, E)$ kann zum Beispiel durch die Kodierung seiner *Adjazenzmatrix*, die eines gewichteten Graphen durch die Kodierung der *Gewichtsmatrix* beschrieben werden.

Äquivalenz von Kodierungsschemata

Zwei Kodierungsschemata s_1, s_2 heißen **äquivalent** bezüglich eines Problems Π, falls es Polynome p_1, p_2 gibt, sodass gilt:

$$|s_1(I)| = n \implies |s_2(I)| \leq p_2(n)$$

und

$$|s_2(I)| = m \implies |s_1(I)| \leq p_1(m)$$

für alle Instanzen I von Π.

Entscheidungsprobleme

- Ein Entscheidungsproblem Π können wir als Familie/Klasse D_Π von Instanzen auffassen.
  - Mit festem Kodierungsschema s ist das eine Menge von Wörtern über Σ
    $\rightsquigarrow$ unsere Eingaben
- Eine Teilmenge dieser Klasse ist $J_\Pi \subseteq D_\Pi$, die Klasse der **Ja-Instanzen**, d.h. die Instanzen, deren Antwort Ja ist.
- Der Rest der Klasse $N_\Pi \subseteq D_\Pi$ ist die Klasse der **Nein-Instanzen**.

Korrespondenz von Entscheidungsproblemen und Sprachen

Ein Problem Π und ein Kodierungsschema $s\colon D_\Pi \to \Sigma^*$ zerlegen Σ^* in drei Klassen:

- Wörter aus Σ^*, die *nicht* Kodierung eines Beispiels aus D_Π sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung einer Instanz $I \in N_\Pi$ sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung einer Instanz $I \in J_\Pi$ sind.

Die dritte Klasse ist die Sprache, die zu Π im Kodierungsschema s korrespondiert.

Die zu einem Problem Π und einem Kodierungsschema s **zugehörige Sprache** ist

$$L[\Pi, s] := \left\{ x \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \Sigma \text{ ist das Alphabet zu } s \text{ und } x \text{ ist Kodierung} \\ \text{einer Ja-Instanz } I \text{ von } \Pi \text{ unter } s, \text{ d.h. } I \in J_\Pi \end{array} \right\}$$

Entscheidungsprobleme und Turing-Maschinen

- Wir betrachten im Folgenden deterministische Turing-Maschinen mit zwei Endzuständen q_J, q_N, wobei q_J akzeptierender Endzustand ist.
- Dann wird die Sprache $L_{\mathcal{M}}$ akzeptiert von der Turing-Maschine $\mathcal{M}$, falls
$$L_{\mathcal{M}} = \{x \in \Sigma^* \mid \mathcal{M} \text{ akzeptiert } x\} .$$
- Eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ **löst** ein Entscheidungsproblem Π unter einem Kodierungsschema s, falls $\mathcal{M}$ bei jeder Eingabe über dem Eingabe-Alphabet in einem Endzustand endet und $L_{\mathcal{M}} = L[\Pi, s]$ ist.
  - D.h. die Turing-Maschine $\mathcal{M}$ entscheidet $L[\Pi, s]$.

Zeitkomplexität

Für eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die für alle Eingaben über dem Eingabe-Alphabet Σ hält, ist die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine Eingabe } x \in \Sigma^* \text{ mit } |x| = n, \text{ so} \\ \text{dass die Berechnung von } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x \\ m \text{ Berechnungsschritte (Übergänge) benötigt,} \\ \text{bis ein Endzustand erreicht wird} \end{array} \right\}$$

Zeitkomplexität

Für eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die für alle Eingaben über dem Eingabe-Alphabet Σ hält, ist die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine Eingabe } x \in \Sigma^* \text{ mit } |x| = n, \text{ so} \\ \text{dass die Berechnung von } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x \\ m \text{ Berechnungsschritte (Übergänge) benötigt,} \\ \text{bis ein Endzustand erreicht wird} \end{array} \right\}$$

Bemerkungen

- Wenn Eingabe x Länge n hat, so braucht $\mathcal{M}$ höchstens $T_{\mathcal{M}}(n)$ Berechnungsschritte.
- Für ein Entscheidungsproblem Π mit Kodierungsschema s:

Instanz $I \in D_\Pi$ von Π	$\leftrightsquigarrow$	Kodierung $s(I) \in \Sigma^*$
Kodierungslänge $\lvert s(I)\rvert$	$\leftrightsquigarrow$	Länge des Wortes
Zeit zum Lösen von I	$\leftrightsquigarrow$	Anzahl Berechnungsschritte von $\mathcal{M}$

Die Klasse $\mathcal{P}$

Die Klasse $\mathcal{P}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine deterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

- Zum Beispiel $T_{\mathcal{M}}(n) \leq 4n^2 + 42$.
- Sprachen/Entscheidungsprobleme in $\mathcal{P}$ sind „effizient lösbar“.

Schwierigkeit von Entscheidungs- und Optimierungsproblem

Satz:
Falls es einen Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der das Entscheidungsproblem des TSP in polynomialer Zeit löst, so gibt es auch einen Algorithmus, der das Optimierungsproblem in polynomialer Zeit löst.

Schwierigkeit von Entscheidungs- und Optimierungsproblem

Satz:
Falls es einen Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der das Entscheidungsproblem des TSP in polynomialer Zeit löst, so gibt es auch einen Algorithmus, der das Optimierungsproblem in polynomialer Zeit löst.

Beweis: Algorithmus, der das Optimierungsproblem löst.

Input: $G = (V, E)$, $c_{ij} = c(\{i, j\})$ für $i, j \in V := \{1, \ldots, n\}$, Algorithmus $\mathcal{A}$

Output: d_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, sodass alle bis auf n der d_{ij}-Werte den Wert $1 + \max\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ haben. Die restlichen n d_{ij}-Werte haben den Wert c_{ij} und geben genau die Kanten einer optimalen Tour an.

Algorithmus OPT-TOUR (als Beweis) 1/2

1. berechne $m := \max\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$;
2. setze L(ow) $:= 0$ und H(igh) $:= n \cdot m$; $(L \leq OPT \leq H)$
3. **Solange** $H - L > 1$ gilt, führe aus: (binäre Suche nach OPT)
4. **Falls** $\mathcal{A}(G, c, \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil) =$ „nein“, $(OPT > \lceil \frac{1}{2}(H+L) \rceil)$
5. setze $L := \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil + 1$;
6. **Sonst** $(OPT \leq \lceil \frac{1}{2}(H+L) \rceil)$
7. setze $H := \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil$;
8. **Falls** $\mathcal{A}(G, c, L) =$ „nein“ (hier gilt $H - L \leq 1$)
9. setze $OPT := H$;
10. **Sonst**
11. setze $OPT := L$;

Algorithmus OPT-TOUR (als Beweis) 2/2

Wir kennen den Optimalwert OPT und finden jetzt eine optimale Tour.

12 **Für** $i = 1 \ldots n$ führe aus

13 **Für** $j = 1 \ldots n$ führe aus

14 setze $R := c_{ij}$; (merke Länge der Kante ij)

15 setze $c_{ij} := m + 1$; (mache Kante ij zu lang)

16 **Falls** $\mathcal{A}(G, c, OPT) =$ „nein“, (Kante ij in opt. Tour)

17 setze $c_{ij} := R$; (Kante ij wie vorher)

18 setze $d_{ij} := c_{ij}$;

Bemerkungen zum Algorithmus

Die Schleife der binären Suche bricht ab, und danach ist die Differenz $H - L$ gleich 1 oder 0, denn:

- Solange $H - L > 1$, ändert sich bei jedem Schleifendurchlauf einer der Werte H, L:
  - Für $H - L > 1$ gilt, dass $L \neq \left\lceil \frac{1}{2}(H + L) \right\rceil + 1$ und $H \neq \left\lceil \frac{1}{2}(H + L) \right\rceil$ ist.
- Die Differenz $H - L$ verkleinert sich mit jedem Durchlauf
- Da H und L ganzzahlig sind, tritt der Fall $H - L \leq 1$ ein.
- Zu jedem Zeitpunkt gilt $H - L \geq 0$:
  - $H - L = 0$ ist möglich, wenn zum Beispiel L auf $\lceil \frac{1}{2}(H + L) \rceil + 1$ erhöht wird und vorher $H - L = 2$ oder $H - L = 3$ war.

Laufzeit des Algorithmus

- $\mathcal{A}(G, c, k)$ wird (für verschiedene k) etwa $\log(n \cdot m)$-mal aufgerufen.
- $\mathcal{A}(G, c, OPT)$ wird etwa n^2-mal aufgerufen.
- Es finden also $\mathcal{O}(n^2 + \log(nm))$ Aufrufe von $\mathcal{A}$ statt.
- Die Inputlänge ist $\mathcal{O}(n^2 \cdot \max \langle c_{ij} \rangle) = \mathcal{O}(n^2 \cdot \max \log c_{ij})$.
- Da $\mathcal{A}$ polynomiell ist, ist dies also auch OPT-TOUR.

Zwischenstand Komplexitätstheorie

- **Probleme**
  - Optimierungsprobleme, Optimalwertprobleme, Entscheidungsprobleme
  - Problem Π ist Klasse D_Π von Instanzen I.
- **Eingabegrößen**
  - Kodierungsschema $s\colon D_\Pi \to \Sigma^*$ über Alphabet Σ^*.
  - Kodierung $s(I)$ einer Instanz I ist ein Wort aus Σ^*.
  - Inputlänge $|s(I)|$ ist Länge des Wortes.
- **Entscheidungsprobleme**
  - Ja-Instanzen J_Π und Nein-Instanzen N_Π
  - Sprache $L[\Pi, s]$ der Kodierungen aller Ja-Instanzen
  - TM $\mathcal{M}$ löst Π, wenn $\mathcal{M}$ Sprache $L[\Pi, s]$ entscheidet.
- **Laufzeiten**
  - Zeitkomplexitätsfunktion $T_\mathcal{M}(n)$ von $\mathcal{M}$ bei Eingaben der Länge n
  - Die Klasse $\mathcal{P}$: Sprachen von $\mathcal{M}$ mit $T_\mathcal{M}(n)$ polynomiell in n.
- Am Beispiel TSP: Entscheidung $\to$ Optimalwert $\to$ Optimierung

Zwischenstand Komplexitätstheorie

- **Probleme**
  - Optimierungsprobleme, Optimalwertprobleme, Entscheidungsprobleme
  - Problem Π ist Klasse D_Π von Instanzen I.
- **Eingabegrößen**
  - Kodierungsschema $s\colon D_\Pi \to \Sigma^*$ über Alphabet Σ^*.
  - Kodierung $s(I)$ einer Instanz I ist ein Wort aus Σ^*.
  - Inputlänge $|s(I)|$ ist Länge des Wortes.
- **Entscheidungsprobleme** **Testen Sie sich!**
  - Ja-Instanzen J_Π und Nein-Instanzen N_Π
  - Sprache $L[\Pi, s]$ der Kodierungen aller Ja-Instanzen
  - TM $\mathcal{M}$ löst Π, wenn $\mathcal{M}$ Sprache $L[\Pi, s]$ entscheidet.
- **Laufzeiten**
  - Zeitkomplexitätsfunktion $T_\mathcal{M}(n)$ von $\mathcal{M}$ bei Eingaben der Länge n
  - Die Klasse $\mathcal{P}$: Sprachen von $\mathcal{M}$ mit $T_\mathcal{M}(n)$ polynomiell in n.
- Am Beispiel TSP: Entscheidung $\to$ Optimalwert $\to$ Optimierung

Die Nichtdeterministische Turing-Maschine

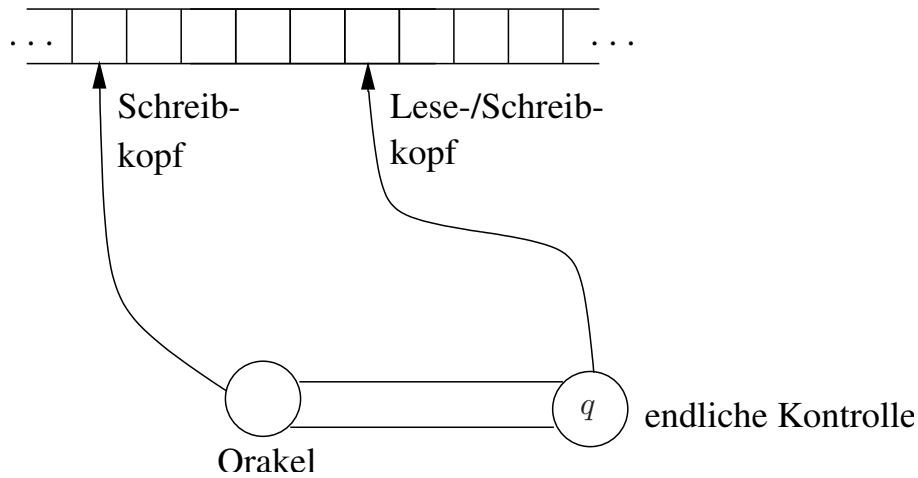
Die „klassische“ nichtdeterministische Turing-Maschine:

- Bei der nichtdeterministischen Turing-Maschine wird die Übergangsfunktion δ zu einer Relation erweitert.
- Dies ermöglicht Wahlmöglichkeiten und ε-Übergänge $\rightsquigarrow$ vergleiche endliche Automaten.

Die **Orakel-Turing-Maschine**:

- Wir betrachten ein äquivalentes Modell einer nichtdeterministischen Turing-Maschine (NTM), die auf einem **Orakel** basiert.
- Dies kommt der Intuition näher.

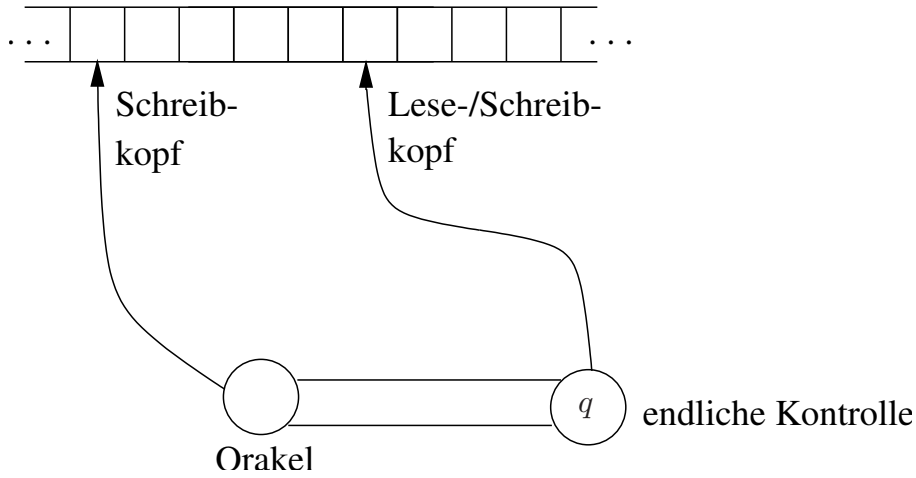
Die Orakel-Turing-Maschine



Nichtdeterministische
Turing-Maschinen

- werden analog zu DTMs durch ein Oktupel $(Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, s, \delta, q_J, q_N)$ beschrieben.
- haben genau zwei Endzustände q_J und q_N,
  wobei q_J der akzeptierende Endzustand ist.
- haben zusätzlich zu der endlichen Kontrolle mit dem Lese-/Schreibkopf ein **Orakelmodul** mit einem eigenen Schreibkopf.

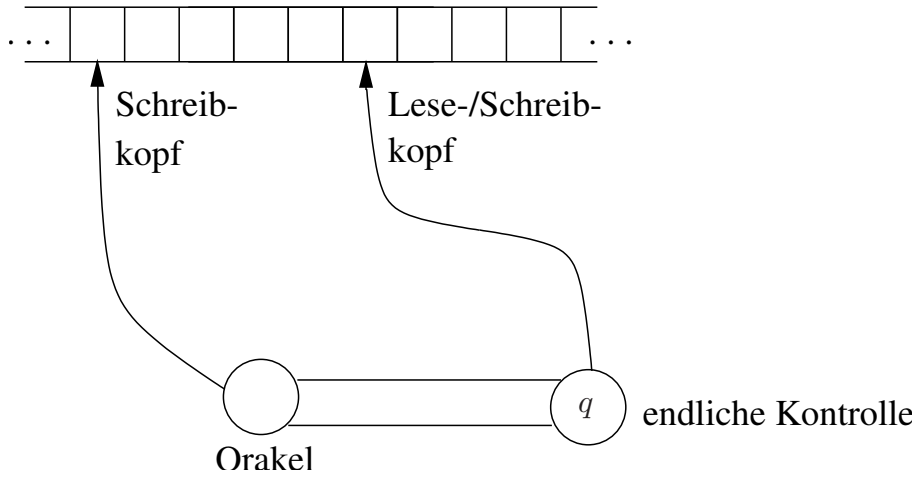
Die Orakel-Turing-Maschine



Berechnung einer nichtdeterministischen Turing-Maschine:

- **1. Stufe:**
  - Das Orakelmodul schreibt zunächst ein Trennzeichen in die Zelle direkt vor der Eingabe.
  - Dann weist es seinen Schreibkopf an, Schritt für Schritt entweder ein Symbol zu schreiben und nach links zu gehen oder anzuhalten.
  - Falls der Schreibkopf anhält, wird das Orakelmodul inaktiv, und die endliche Zustandskontrolle wird aktiv.
- **2. Stufe:**
  - Ab jetzt genau wie bei DTM.
  - Das Orakelmodul und sein Schreibkopf sind nicht weiter beteiligt.

Die Orakel-Turing-Maschine



Akzeptanz einer Eingabe:

- Eine NTM $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort $x \in \Sigma^*$ genau dann, wenn es eine Berechnung gibt, die in q_J endet.
- Eine NTM $\mathcal{M}$ akzeptiert die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann, wenn sie gerade die Wörter aus L akzeptiert.

Übertragung auf Entscheidungsprobleme Π

Die Eingabe ist ein Wort aus Σ^*, zum Beispiel eine Kodierung einer Instanz $I \in D_\Pi$ des Entscheidungsproblems Π.

- **1. Stufe:** Es wird ein Orakel aus Γ^* berechnet, zum Beispiel ein Lösungsbeispiel für I, also ein Indikator, warum $I \in J_\Pi$ gelten sollte.
- **2. Stufe:** Hier wird nun dieser Lösungsvorschlag überprüft, d.h. es wird geprüft, ob $I \in J_\Pi$.

Beispiel TSP

- **1. Stufe:** Es wird zum Beispiel eine zykl. Permutation $x_1 x_2 \cdots x_n$ der Knotenmenge V vorgeschlagen.
  D.h. $\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ G = (V, E),\ c,\ k}$ ist die Eingabe für 2. Stufe.
- **2. Stufe:** Es wird nun überprüft, ob $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ eine Tour in $G = (V, E)$ darstellt, deren Länge bezüglich c nicht größer als k ist.

Bemerkungen zur NTM

- Das Orakel kann ein beliebiges Wort aus Γ^* sein.
- Darum muss in der Überprüfungsphase (2.Stufe) geprüft werden, ob das Orakel ein zulässiges Lösungsbeispiel für die gegebene Eingabe ist.
- Ist dies der Fall, so kann die Berechnung zu diesem Zeitpunkt mit der Antwort „Ja“ beendet werden.
  $\rightsquigarrow$ gehe in Zustand q_J
- Ist dies nicht der Fall, so kann die Berechnung zu diesem Zeitpunkt mit der Antwort „Nein“ beendet werden.
  $\rightsquigarrow$ gehe in Zustand q_N

- Jede NTM $\mathcal{M}$ hat zu einer gegebenen Eingabe x eine unendliche Anzahl möglicher Berechnungen – eine zu jedem Orakel aus Γ^*.
- Endet mindestens eine in q_J, so wird x akzeptiert.

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so} \\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,} \\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist} \end{array} \right\}\right)$$

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so}\\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,}\\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist}\end{array} \right\}\right)$$

Bemerkung 1

- Zur Berechnung von $T_{\mathcal{M}}(n)$ wird für jedes $x \in L_{\mathcal{M}}$ mit $|x| = n$ eine kürzeste akzeptierende Berechnung betrachtet.
- Anschließend wird von diesen kürzesten die längste bestimmt.
- Somit ergibt sich eine *worst-case*-Abschätzung.

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so} \\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,} \\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist} \end{array} \right\}\right)$$

Bemerkung 2

- Die Zeitkomplexität hängt nur von der Anzahl der Schritte ab, die bei einer akzeptierenden Berechnung auftreten.
- Hierbei umfasst die Anzahl der Schritte auch die Schritte der Orakelphase.
- Per Konvention ist $T_{\mathcal{M}}(n) = 1$, falls es keine Eingabe x der Länge n gibt, die von $\mathcal{M}$ akzeptiert wird.

Die Klasse $\mathcal{NP}$

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine nichtdeterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Die Klasse $\mathcal{NP}$

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine nichtdeterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Bemerkungen

- Alle Sprachen in $\mathcal{NP}$ sind entscheidbar.
- Informell ausgedrückt gehört Π zu $\mathcal{NP}$, falls Π folgende Eigenschaft hat:
  Ist die Antwort bei Eingabe eines Beispiels I von Π Ja, dann kann die Korrektheit der Antwort in polynomialer Zeit überprüft werden.

Die Klasse $\mathcal{NP}$

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine nichtdeterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Beispiel: TSP$\in \mathcal{NP}$:

Denn zu gegebenem $G = (V, E), c, k$ und einer festen zykl. Permutation $x_1 x_2 \cdots x_n$ von V kann in $O(|V| \cdot \log C)$ (wobei C die größte vorkommende Zahl ist) Schritten überprüft werden, ob

$$\{x_i, x_{i+1}\} \in E \text{ für } i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n-1} c(\{x_i, x_i + 1\}) \leq k$$

gilt.

$\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

Die Klasse $\mathcal{P}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine deterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist.

$\rightsquigarrow$ Bei Eingabe einer Instanz I von Π kann die Existenz einer Lösung in polynomialer Zeit überprüft werden.

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L (Entscheidungsprobleme), für die eine nichtdeterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist.

$\rightsquigarrow$ Existiert für die Eingabe einer Instanz I von Π eine Lösung, dann kann die Korrektheit einer Lösung in polynomialer Zeit überprüft werden.

Große Frage: Ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?