Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 22. Oktober 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Letzte Vorlesung

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

reguläre Sprache L $\Longrightarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\Longrightarrow$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\Longrightarrow$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε-Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

reguläre Sprache L $\Longleftrightarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\Longrightarrow$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\Longrightarrow$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε-Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

reguläre Sprache L $\Longleftrightarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\Longrightarrow$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\Longleftrightarrow$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε-Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Letzte Vorlesung

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

reguläre Sprache L $\Longleftrightarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\Longleftrightarrow$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Heute:

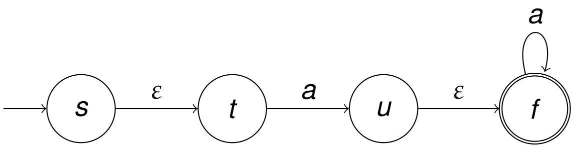
- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε-Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



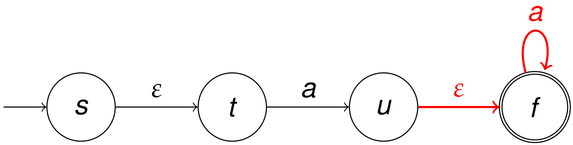
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$				$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



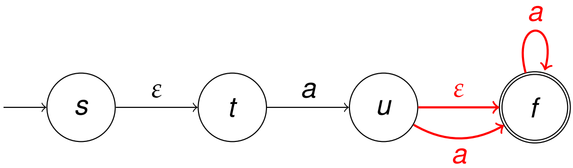
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$			$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



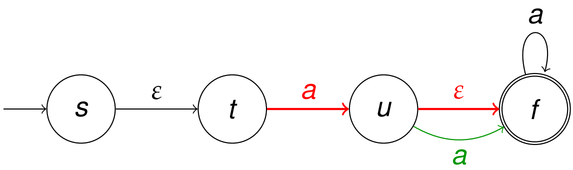
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$			$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



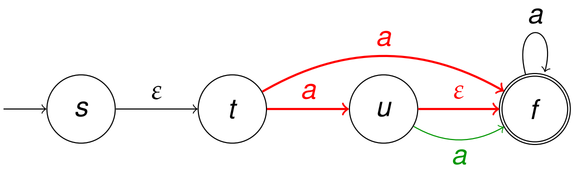
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q,a)$		$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



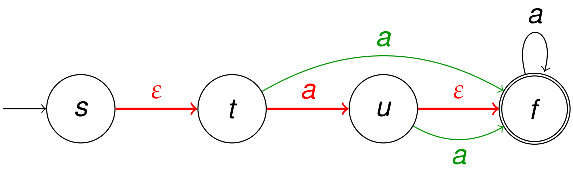
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q,a)$		$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



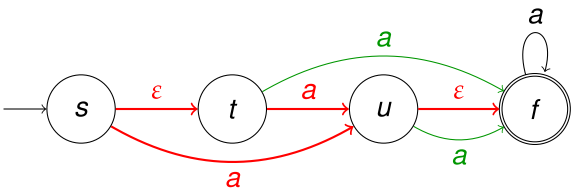
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



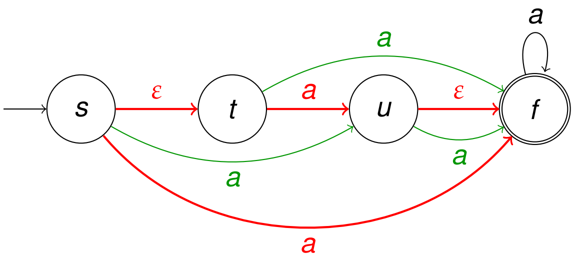
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



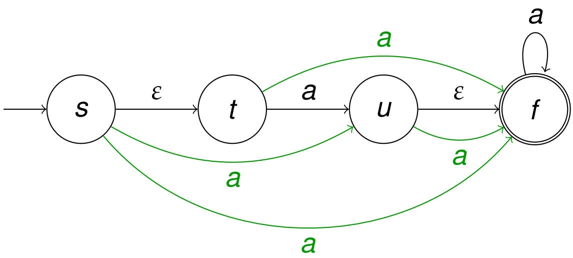
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q,a)$	$\{u,f\}$	$\{u,f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



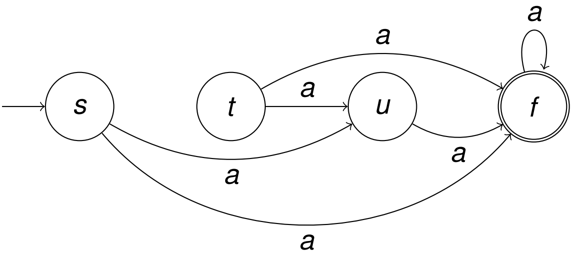
q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q,a)$	$\{u,f\}$	$\{u,f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ε-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Erinnerung an Erweiterung $\bar{\delta}$:

$p \in \bar{\delta}(q, a)$ heißt, dass p von q erreichbar ist mit beliebig vielen ε-Übergängen und genau einem a-Übergang.



q	s	t	u	f
$\bar{\delta}(q, a)$	$\{u, f\}$	$\{u, f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

Entfernen von ϵ-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NEA mit ε-Übergängen.
Konstruiere NEA $\widetilde{\mathcal{A}} := (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ ohne ε-Übergänge wie folgt:

- $\widetilde{Q} := Q$, $\widetilde{s} := s$, $\widetilde{F} := F$ (bzw. $\widetilde{F} := F \cup \{\widetilde{s}\}$, falls $E(s) \cap F \neq \emptyset$)
- $$\widetilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\} & \text{falls } a = \varepsilon \\ \bar{\delta}(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Übergang in $\widetilde{\mathcal{A}}$ entspricht einer Folge von Übergängen in $\mathcal{A}$, von denen genau einer kein ε-Übergang ist, und umgekehrt.

$\rightsquigarrow$ $\widetilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A}$ erkennen dieselbe Sprache, d.h. sie sind äquivalent.

Letzte Vorlesung

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

reguläre Sprache L $\iff$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\iff$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Heute:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne ε-Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

EA $\rightarrow$ Regularität

Satz:
Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten erkannt wird, ist regulär.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$$

- Die Abarbeitung eines Wortes $w = a_1 \dots a_k$ bewirkt das Durchlaufen einer Folge von Zuständen $s, q_1, \dots, q_k$, wobei nicht notwendig $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$ gilt.
- Wir suchen die Wörter, sodass der letzte Zustand in F ist.
- Betrachte für jeden Zustand $f \in F$ getrennt die Wörter, deren Abarbeitung in f endet.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$$

Zu $f \in F$ definiere:

$$\begin{aligned} L_f &:= \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in } f\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\} \end{aligned}$$

- Damit ist $L = \bigcup_{f \in F} L_f$.
- Wenn wir zeigen können, dass für alle $f \in F$ die Sprache L_f regulär ist, so ist auch L regulär.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

$$L_f := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\}$$

Ab jetzt sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
Wir definieren zu

$$q_r, q_t \in Q\colon\ L_{q_r,q_t} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t\}\,.$$

Insbesondere gilt also: $L_f = L_{s,f}$. Unterteile L_{q_r,q_t}:

$$L_{q_r,i,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur} \\ \text{Zwischenzustände in } \{q_1, \ldots, q_i\} \end{array} \right\}$$

(also w bewirkt: $q_r \rightarrow \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\in\{q_1,\ldots,q_i\}} \rightarrow q_t$.)

Damit gilt $L_{q_r,q_t} = L_{q_r,n,q_t}$.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

$$L_{q_r,i,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur} \\ \text{Zwischenzustände in } \{q_1, \ldots, q_i\} \end{array} \right\}$$

Wir zeigen, dass L_{q_r,i,q_t} für $q_r, q_t \in Q$ und $0 \leq i \leq n$ regulär sind:

- Zunächst betrachten wir direkte Überführungen, also $i = 0$:

$$L_{q_r,0,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ führt von } q_r \text{ nach } q_t \\ \text{ohne Zwischenzustand} \end{array} \right\}$$

Falls $r = t$ und somit $q_r = q_t$ ist, ist

$$L_{q_r,0,q_t} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_t, a) = q_t\} \cup \{\varepsilon\}.$$

Andernfalls betrachten wir alle w mit $q_r \xrightarrow{w} q_t$, ohne Zwischenzustände, also

$$L_{q_r,0,q_t} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_r, a) = q_t\}.$$

Diese Sprachen sind jeweils regulär.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Betrachte nun $i = 1$:

$$L_{q_r,1,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t \text{ entweder direkt oder} \\ \text{unter Benutzung nur von } q_1 \end{array} \right\}$$

  Es gilt dann:

$$L_{q_r,1,q_t} = L_{q_r,0,q_t} \cup \left(L_{q_r,0,q_1} \cdot \left(L_{q_1,0,q_1} \right)^* \cdot L_{q_1,0,q_t} \right)$$

  Also ist $L_{q_r,1,q_t}$ auch wieder regulär, weil $L_{\cdot,0,\cdot}$ regulär ist.

- Wir wollen per Induktion nach i zeigen, dass L_{q_r,i,q_t} für alle $q_r, q_t \in Q$ und alle $0 \leq i \leq n$ regulär ist.

- Für den Induktionsschritt $i \geq 1$ gilt allgemein:

$$L_{q_r,i,q_t} = L_{q_r,i-1,q_t} \cup \left(L_{q_r,i-1,q_i} \cdot \left(L_{q_i,i-1,q_i} \right)^* \cdot L_{q_i,i-1,q_t} \right)$$

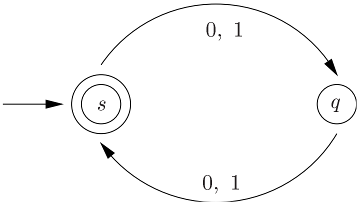
Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

$$L_{q_r,i,q_t} = L_{q_r,i-1,q_t} \cup \left(L_{q_r,i-1,q_i} \cdot \left(L_{q_i,i-1,q_i} \right)^* \cdot L_{q_i,i-1,q_t} \right)$$

- Es wurden für L_{q_r,i,q_t} nur die Sprachen $L_{\cdot,i-1,\cdot}$ und $\cup, \cdot, *$ verwendet.
- Per Induktion nach i können wir annehmen, dass alle Sprachen der Form $L_{\cdot,i-1,\cdot}$ regulär sind.
- Damit ist gezeigt, dass auch L_{q_r,i,q_t} regulär ist für alle Zustandspaare aus $q_r, q_t \in Q$.
- Damit ist gezeigt, dass insbesondere $L_f = L_{s,n,f}$ regulär ist für jedes $f \in F$.
- Damit ist auch $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{f \in F} L_f$ regulär.

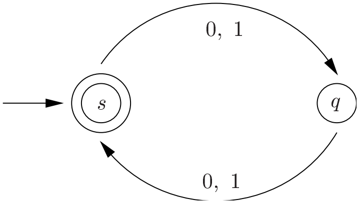
Beispiel

Sei $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $Q := \{q_1 := s, q_2 := q\}, \Sigma := \{0, 1\}, F := \{s\}$



Gesucht: $L(Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Es gilt $L = L_{q_1,2,q_1}$.

Beispiel



Gesucht: $L(Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Es gilt $L = L_{q_1,2,q_1}$.

Dann ist

$$L_{q_i,0,q_i} = \varepsilon$$

$$L_{q_i,0,q_j} = (0 \cup 1) \text{ für } i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

$$L_{q_1,1,q_1} = L_{q_1,0,q_1} \cup L_{q_1,0,q_1} \left(L_{q_1,0,q_1}\right)^* L_{q_1,0,q_1} = \varepsilon$$

$$L_{q_1,1,q_2} = L_{q_1,0,q_2} \cup L_{q_1,0,q_1} (L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_2} = (0 \cup 1) \cup \varepsilon\varepsilon^* (0 \cup 1) = 0 \cup 1$$

$$L_{q_2,1,q_1} = (0 \cup 1) \cup (0 \cup 1)\varepsilon^*\varepsilon = 0 \cup 1$$

$$L_{q_2,1,q_2} = \varepsilon \cup (0 \cup 1)\varepsilon^*(0 \cup 1) = \varepsilon \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)$$

$$\begin{aligned} L = L_{q_1,2,q_1} &= L_{q_1,1,q_1} \cup (L_{q_1,1,q_2} (L_{q_2,1,q_2})^* L_{q_2,1,q_1}) \\ &= \varepsilon \cup (0 \cup 1) \left((0 \cup 1)(0 \cup 1)\right)^* (0 \cup 1) = \left((0 \cup 1)(0 \cup 1)\right)^* \end{aligned}$$

Satz von Kleene

- Wir haben gezeigt, dass die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.
- Dies wird auch als der **Satz von Kleene** bezeichnet.

Satz (Satz von Kleene):
Die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

reguläre Sprache L	$\Longleftrightarrow$	regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$	$\Longleftrightarrow$	NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt	$\Longleftrightarrow$	DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Satz von Kleene

- Wir haben gezeigt, dass die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.
- Dies wird auch als der **Satz von Kleene** bezeichnet.

> **Satz (Satz von Kleene):**
> Die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

reguläre Sprache L	$\Longleftrightarrow$	regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$	$\Longleftrightarrow$	NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt	$\Longleftrightarrow$	DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Beispiel:
Die Sprache *L* der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{(,)\}$.
Etwa

$$\Big(()()\Big), \left(()()\big(()\big)\right) \in L \qquad ((()), (()))()(\notin L$$

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Beispiel:
Die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{(,)\}$.
Etwa

$$\Big(()()\Big), \Bigg(()()\Big(()\Big)\Bigg) \in L \qquad ((()), (()))()(\notin L$$

- Die Klammerung ist genau dann korrekt, wenn w gleich viele öffnende wie schließende Klammern enthält, und wenn man w von links nach rechts liest, so gibt es nie mehr „)“ als „(“ bis dahin.
- Ein Automat, der L erkennen kann, muss in der Lage sein, sich für ein beliebiges Wort $w \in L$ die Anzahl von „(“ gegenüber „)“ zu merken.
- Dies kann aber beliebig groß werden, und der Automat müsste über unendliche viele Zustände verfügen.
- Die Sprache der Klammerausdrücke ist also zwar simpel, aber wohl nicht regulär.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Für alle	$\forall L \subseteq \Sigma^*$ mit L regulär
existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $|w| > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $|uv| \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^ix \in L$

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\; v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

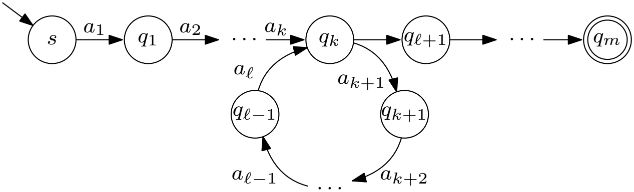
- Sei L eine reguläre Sprache.
- Dann existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.
- Sei Q dessen Zustandsmenge und $n := |Q|$.
- Sei $w \in L$ beliebig mit $|w| > n$, etwa $w = a_1 \dots a_n \dots a_m$ mit $m > n$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Beweis:

- Sei L eine reguläre Sprache.
- Dann existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.
- Sei Q dessen Zustandsmenge und $n := |Q|$.
- Sei $w \in L$ beliebig mit $|w| > n$, etwa $w = a_1 \dots a_n \dots a_m$ mit $m > n$.

Bei der Abarbeitung von w werden dann Zustände $q_0, \dots, q_m$ durchlaufen mit $q_0 = s$ und $q_m \in F$.
Da $m > n$, gibt es k, ℓ mit $k \neq \ell$ und $q_k = q_\ell$.
OBdA. sei $k < \ell$ und seien k, ℓ kleinstmöglich. Also $0 \leq k < \ell \leq n$.

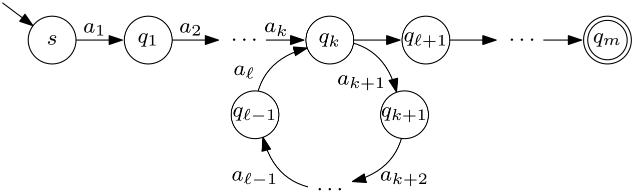


Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



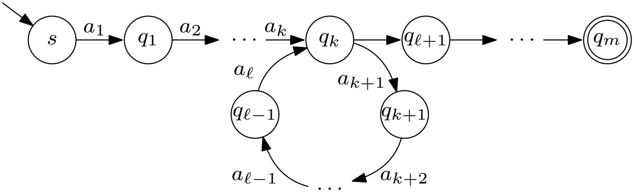
Dann kann der Zykel $q_k, q_{k+1}, \ldots, q_\ell = q_k$ auch gar nicht oder beliebig oft bei der Abarbeitung eines Wortes aus L durchlaufen werden und es wird stets der Zustand $q_m \in F$ erreicht.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



Also gibt es eine Zerlegung $w = \underbrace{(a_1 \dots a_k)}_{u} \cdot \underbrace{(a_{k+1} \dots a_\ell)}_{v} \cdot \underbrace{(a_{\ell+1} \dots a_m)}_{x}$

mit $|uv| = \ell \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, sodass auch $uv^i x \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Verwendung des Pumping-Lemmas

- Das Pumping-Lemma liefert eine notwendige Bedingung für die Regularität von Sprachen.
- Durch Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas kann man zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist.

- Das Pumping-Lemma liefert keine hinreichende Bedingung für die Regularität von Sprachen.
- Durch Nachweisen der Aussage des Pumping-Lemmas kann man nichts zeigen.

Merke:
Jede reguläre Sprache erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas.
Eine Sprache, die die Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt, ist auch nicht regulär.

Verwendung des Pumping-Lemmas

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L:

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\|w\| > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx, \|uv\| \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0:$
gilt	$uv^i x \in L$

Verwendung des Pumping-Lemmas

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L:

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \in L$

Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L:

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$
existiert	$\exists w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
für alle	$\forall u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
existiert	$\exists i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \notin L$

Beispiel (1) zum PL

Aussage des Pumping-Lemmas für gegebene Sprache L:

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\|w\| > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx$, $\|uv\| \leq n$, $v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \in L$

Beispiel (1)

- $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält 10 nicht als Teilwort}\} = 0^*1^*$

“$\exists$” Wähle $n = 1$.
“$\forall$” Betrachte beliebiges $w \in L$, $|w| > n$.
“$\exists$” Wähle Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$, $|v| = 1$.
“$\forall$” Für beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ hat $uv^i x$ nicht 10 als Teilwort; $uv^i x \in L$.

$\rightsquigarrow$ *L* erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas.

Beispiel (2) zum PL

Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas für Sprache L:

für alle $\forall n \in \mathbb{N}$

existiert $\exists w \in L$ mit $|w| > n$

für alle $\forall u, v, x \in \Sigma^*$ mit $w = uvx, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon$

existiert $\exists i \in \mathbb{N}_0:$

gilt $uv^i x \notin L$

Beispiel (2)

- $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \ldots\}$

“$\forall$” Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
“$\exists$” Wähle $w = 0^n 1^n$. Beachte: $|w| = 2n > n$ und $w \in L$.
“$\forall$” Betrachte beliebige Zerlegung $w = uvx$, $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$.
“$\exists$” Wähle $i = 0$. Da $v = 0^a$ für ein $a \geq 1$, ist $uv^0 x = 0^{n-a} 1^n \notin L$.

$\leadsto$ L erfüllt nicht Aussage des Pumping-Lemmas. $\leadsto$ L ist nicht regulär.

Beispiel (3) zum PL

$$\exists n\, \forall w \in L, |w| > n\, \exists uvx = w, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon\, \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L$$

Beispiel (3)

- $\Sigma = \{0, 1\}$,
  $L = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w = 1^k\ (k > 0) \text{ oder } w = 0^j 1^{k^2}\ (j \geq 1,\ k \geq 0) \right\}$.

  "∃" Wähle $n = 1$.
  "∀" Betrachte beliebiges $w \in L$, $|w| > n$.
  "∃" Wähle Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$, $|v| = 1$.
  "∀" Betrachte beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$.
- Falls $w = 1^k$, so ist $uv^i x = 1^{k+i-1}$, also vom Typ $1^\ell \in L$.
- Falls $w = 0^j 1^{k^2}$ und $i = 0$, so ist $uv^0 x = 1^{k^2} \in L$ oder $uv^0 x = 0^{j-1} 1^{k^2} \in L$.
- Falls $w = 0^j 1^{k^2}$ und $i \geq 1$, so ist $uv^i x = 0^{j+i} 1^{k^2} \in L$.

$\rightsquigarrow$ *L* erfüllt die Aussage des Pumping-Lemmas. (Aber *L* ist nicht regulär!)

Zusammenfassung

- beliebiger NEA $\mathcal{A}$ $\longrightarrow$ NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge
- beliebiger DEA $\mathcal{A}$ $\longrightarrow$ regulärer Ausdruck für $L(\mathcal{A})$

reguläre Sprache L $\Longleftrightarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ $\Longleftrightarrow$ NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt $\Longleftrightarrow$ DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

Zusammenfassung

- beliebiger NEA $\mathcal{A}$ $\longrightarrow$ NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge
- beliebiger DEA $\mathcal{A}$ $\longrightarrow$ regulärer Ausdruck für $L(\mathcal{A})$

reguläre Sprache L	$\Longleftrightarrow$	regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$	$\Longleftrightarrow$	NEA $\mathcal{A}$, der $L(\alpha)$ erkennt	$\Longleftrightarrow$	DEA $\tilde{\mathcal{A}}$, der dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt

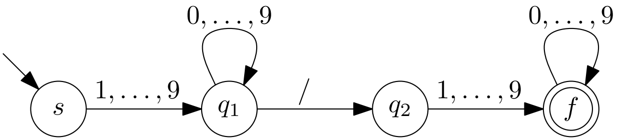
Aussage des Pumping-Lemmas:
$\exists n\, \forall w \in L, |w| > n\, \exists uvx = w, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon\, \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^ix \in L \quad (\star)$

- Pumping-Lemma: L regulär $\Longrightarrow$ L erfüllt $(\star)$
- Widerlegen der Aussage des Pumping-Lemmas beweist Nicht-Regularität einer Sprache:

  L erfüllt $(\star)$ nicht $\Longrightarrow$ L ist nicht regulär $\Longleftrightarrow$ L nicht von EA erkannt

Testen Sie sich:

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{/\}$.
Sei $L = L(\mathcal{A})$ mit folgendem Automaten $\mathcal{A}$:



$\leadsto$ Finden Sie einen regulären Ausdruck für L?

$\leadsto$ Gilt die Aussage des Pumping-Lemmas für L? (Für welche n?)

Sei $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{=\}$.
Sei $L' = \{w \in \Sigma^* \mid w = uvu \text{ mit } u \in \{1, \ldots, 9\}^*, v = \texttt{=}\}$.

$\leadsto$ Gilt die Aussage des Pumping-Lemmas für L'?