Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 6

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 18/19

Ausgabe 8. Januar 2019
Abgabe 22. Januar 2019, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1

(2 + 2 + 3 + 1 = 8 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C, D\}$, Startsymbol S und Produktionen

$$\begin{aligned} R = \{ & S \to AD \\ & A \to CB \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{c} \\ & B \to AD \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{d} \\ & C \to DB \mid \mathsf{c} \\ & D \to AC \mid \mathsf{c} \mid \mathsf{d} \} \end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort cbacd in der Sprache $L(G)$ enthalten ist.

c	b	a	c	d

(b) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort cbacd an.

(c) Erweitern Sie den CYK-Algorithmus so, dass falls das überprüfte Wort tatsächlich von der Grammatik erzeugt wird, ein Syntaxbaum ausgegeben wird.

(d) Wie viel zusätzliche Laufzeit und wie viel zusätzlichen Speicher benötigt Ihr Algorithmus aus Teilaufgabe (c)? Begründen Sie!

Aufgabe 2 (3 + 1 = 4 Punkte)

Sei eine Grammatik G durch $V = \{S, X, Y\}, \Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$ und folgende Regelmenge R gegeben:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}S\mathsf{c} \mid X \mid \mathsf{d}Y \\ X &\to \mathsf{b}X\mathsf{c} \mid \varepsilon \\ Y &\to \mathsf{d}S \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um G in eine äquivalente Grammatik in erweiterter Chomsky-Normalform zu überführen. Es genügt dabei, wenn sie nach jedem Schritt bzw. jeder Phase das jeweilige Ergebnis angeben.

(b) In Schritt 4, Phase 2 wird beim Ersetzen von Kettenregeln der Form $A \to B$ in umgekehrter topologischer Sortierung vorgegangen. Warum ist dies nötig? Geben Sie eine Grammatik und eine Sortierung der Variablen an, für die das Verfahren nicht zum korrekten Ergebnis führt.

Aufgabe 3 (2 + 4 = 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen den Sprachen der Klasse $\mathsf{NTAPE}(n)$ entsprechen[1], indem Sie in zwei Schritten vorgehen.

(a) Sei L eine kontextsensitive Sprache. Dann existiert eine nichtdeterministische Turingmaschine M, die L mit linearem Platzbedarf akzeptiert.

(b) Sei M eine nichtdeterministische Turingmaschine, die die Sprache $L(M)$ mit linearem Platzbedarf akzeptiert. Dann existiert eine kontextsensitive Grammatik G, so dass $L(G) = L(M)$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Betrachten Sie eine Verallgemeinerung von kontextfreien Grammatiken, bei der die rechte Seite von Produktionen nicht ein Wort über dem Alphabet $\Sigma \cup \Gamma$ ist, sondern ein regulärer Ausdruck. Beim Anwenden einer Produktionsregel $A \to R(A)$ kann dann ein Nichtterminalsymbol A durch ein beliebiges Wort aus der durch den regulären Audruck $R(A)$ erzeugten Sprache $L(R(A))$ ersetzt werden.

Beweisen Sie, dass solche verallgemeinerten kontextfreien Grammatiken nicht mächtiger sind als „herkömmliche“ kontextfreie Grammatiken, dass sie also genau dieselben Sprachen erzeugen.

[1] Vergleiche Vorlesung 13, Folie 18.

Aufgabe 5 (1 + 5 = 6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass reguläre Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1, G_2 \text{ rechtslineare Grammatiken mit } L(G_1) = L(G_2)\}$$

entscheidbar ist.

Anmerkung: Für kontextfreie Grammatiken ist die entsprechende Sprache nicht entscheidbar.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind[2]:

(a) $L_1 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{2}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 = \{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^j\mathtt{2}^k \mid i < j < k \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 = \{\mathtt{0}^{n^3}\mathtt{1}^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

[2] Dazu können Sie z.B. das Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen verwenden, dass am 17.01. in der Vorlesung behandelt wird.