Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 18/19

Ausgabe 06. November 2018
Abgabe 20. November 2018, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Bitte benutzen Sie den WebInScribe Deckblattgenerator:
`https://webinscribe.ira.uka.de/deckblatt/index.php?course=10696`

Aufgabe 1

(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Quotientensprache zweier Sprachen L_1 und L_2 über dem Alphabet Σ wie folgt definiert:

$$L_1/L_2 \coloneqq \{w \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2 \colon wz \in L_1\}$$

(a) Beschreiben Sie die Sprache $L_1/\Sigma^\star$ in Worten.

(b) Zeigen Sie: Falls L_1 regulär ist, ist auch $L_1/\Sigma^\star$ regulär. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein DEA, der L_1 erkennt. Geben Sie einen DEA $\mathcal{A}'$ an, der $L_1/\Sigma^\star$ erkennt.

(c) Zeigen Sie: Falls L_1 regulär ist, ist auch L_1/L_2 regulär. Beachten Sie, dass für L_2 keine Einschränkungen gemacht werden. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein DEA, der L_1 erkennt. Geben Sie einen DEA $\mathcal{A}'$ an, der L_1/L_2 erkennt.

Aufgabe 2

(1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

(a) Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, \delta, S, F)$ mit möglichst wenig Zuständen an, sodass für alle binär kodierten Primzahlen w gilt: $w \in L(\mathcal{A})$.

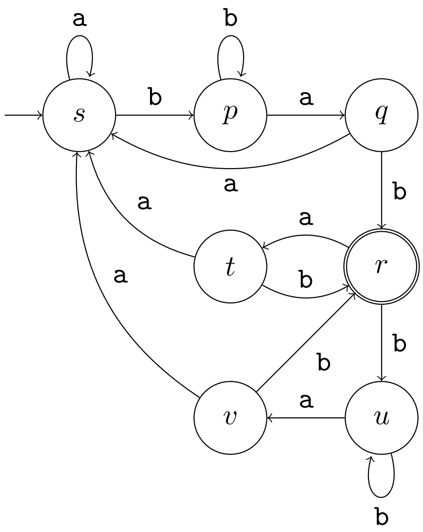
(b) Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache aller vierstelligen Binärzahlen, die eine Primzahl kodieren, erkennt. Dabei sollen Zahlen mit weniger als vier Stellen mit führenden Nullen aufgefüllt werden, also wird z.B. die 1 durch `0001` repräsentiert, aber nicht durch `1`, `01` oder `001`.

(c) Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache L regulär ist, in dem Sie in wenigen Sätzen beschreiben, wie ein DEA konstruiert werden kann, der L akzeptiert.

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem Automaten den zugehörigen Äquivalenzklassenautomaten und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.



Aufgabe 4

(2 + 3 + 2 + 1 = 8 Punkte)

Ein Kommilitone von Ihnen behauptet, dass er ein alternatives Verfahren zur Konstruktion von Äquivalenzklassenautomaten gefunden hat. Statt nach möglicherweise langen Zeugen suchen zu müssen, betrachtet er immer nur einzelne Zeichen. Zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ geht er folgendermaßen vor. Im ersten Schritt partitioniert er die Zustandsmenge in zwei Mengen $Q \setminus F$ und F. In jedem weiteren Schritt wählt er zunächst ein Zeichen $a \in \Sigma$. Jede Menge[1] $[q]$ trennt er genau dann weiter auf, wenn für zwei Zustände $q_1, q_2 \in [q]$ nach dem vorherigen Schritt galt, dass $[\delta(q_1, a)] \neq [\delta(q_2, a)]$. Solch einen Schritt wiederholt er, bis sich bei keinem Zeichen $a \in \Sigma$ weitere Trennungen ergeben. Mit den entstandenen Mengen und dem Verfahren aus der Vorlesung konstruiert er dann den Äquivalenzklassenautomaten.

(a) Führen Sie das Verfahren für den Automaten aus Aufgabe 3 durch, indem Sie die unten stehende Tabelle ausfüllen. Finden Sie dieselben Mengen wie die Äquivalenzklassen aus Aufgabe 3?

[1] Disjunkte Mengen $\{\ldots, q, \ldots\} = [q]$ können durch einen Repräsentanten q identifiziert werden.

Schritt	Zeichen a	Partition nach Trennung durch a
1		$\{s, p, q, t, u, v\}$, $\{r\}$
2	`a`	$\{s, p, q, t, u, v\}$, $\{r\}$
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

(b) Folgern Sie aus $[q_1] \neq [q_2]$ induktiv die Existenz eines Zeugen w, der q_1 und q_2 trennt.

(c) Zeigen Sie, dass am Ende des Verfahrens $[q_1] = [q_2]$ impliziert, dass kein Zeuge existiert, der q_1 und q_2 trennt.

(d) Ist das Verfahren Ihres Kommilitonen korrekt?

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte)

Ist die Aussage des Pumping-Lemmas für folgende Sprachen erfüllt? Welche Sprachen sind regulär? Begründen Sie!

(a) $\Sigma = \{\texttt{A}, \ldots, \texttt{Z}\} \cup \{\texttt{␣}, \texttt{-}\} \cup \{\texttt{0}, \ldots, \texttt{9}\}$, $L_a = \{\text{mögliches Autokennzeichen in Karlsruhe}\}$
Beispielsweise gilt $\texttt{KA-RT␣911} \in L_a$, aber $\texttt{KA-RT-OFFEL} \notin L_a$.

(b) $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$, $L_b = \{w \in \Sigma^\star \mid w_0 \neq w_{\lfloor |w|/2 \rfloor}\}$

(c) $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L_c = \{w \in \Sigma^\star \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$

(d) Für eine beliebige natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $L_k = \{w \in \{1, \ldots, k\}^\star \mid w \text{ ist eine monoton aufsteigende Zahlenfolge}\}$. Das Wort $4\,4\,7\,8$ ist beispielsweise in L_8 enthalten, das Wort $8\,8\,4\,8$ hingegen nicht. Wir unterscheiden Zahlen aus $\{1, \ldots, k\}$ von Wörtern (Zahlenfolgen) aus L_k, indem wir die Zahlen mit einem Leerzeichen trennen. Sie können also die Zahlenfolge $8\,8\,4\,8$ von der Zahl 8848 unterscheiden.

(e) Ist die Menge $L_\infty = \{w \in \mathbb{N}^\star \mid w \text{ ist eine monoton aufsteigende Zahlenfolge}\}$ eine reguläre Sprache?

Aufgabe 6 (1 + 3 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben seien zwei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\texttt{(}, \texttt{)}\}$: L_1 ist die Sprache, in der auf jede öffnende Klammer direkt eine schließende folgt. L_2 ist die Sprache der korrekten Klammerausdrücke (siehe Vorlesung 3, Folie 10).

(a) Geben Sie L_2 in Mengenschreibweise an.

Hinweis: Für ein Wort w können Sie das Teilwort von w, das vom i-ten Zeichen bis zum j-ten Zeichen geht, mit $w_{i,j}$ bezeichnen.

(b) Geben Sie für L_1 und L_2 jeweils die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation (in Mengenschreibweise) an. Geben Sie außerdem für jede Äquivalenzklasse K die Menge S_K der gültigen Suffixe an, also die Menge der $z \in \Sigma^\star$, sodass für jedes $u \in K$ gilt: $uz \in L_1$ bzw. $uz \in L_2$.

(c) Ist L_1 bzw. L_2 regulär? Wenn ja, geben Sie einen DEA mit der minimalen Anzahl von Zuständen an.