Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 22. Januar 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Letzte Vorlesung

- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen
- $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist kontextsensitiv aber nicht kontextfrei
- Nutzlose Variablen effizient finden und eliminieren
- Leere und endliche kontextfreie Sprachen effizient erkennen

Nachtrag:

- Kontextfreie Sprachen sind abgeschlossen unter
  - Vereinigung
  - Konkatenation
  - Kleenschem Abschluss
- Kontextfreie Sprachen sind **nicht** abgeschlossen unter
  - Durchschnitt
  - Komplementbildung

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleeneschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Vereinigung: Die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & \quad \text{neues Startsymbol} \\ R &= R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \end{aligned}$$

erzeugt $L_1 \cup L_2$.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Konkatenation: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \end{array}$$

erzeugt $L_1 \cdot L_2$.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Kleenscher Abschluss: Die Grammatik

$$\begin{array}{rcl} V & = & V_1 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to S_1\} \end{array}$$

erzeugt L_1^*.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis:
Schnitt: Betrachte die kontextfreien Sprachen

$$L_1 = \{a^i b^i \mid i \geq 1\} \qquad L_2 = \{c\}^*$$
$$L_3 = \{a\}^* \qquad L_4 = \{b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

Nach dem letzen Satz sind dann auch $L_1 \cdot L_2$ und $L_3 \cdot L_4$ kontextfrei.
Es ist dann

$$L := L_1 L_2 \cap L_3 L_4 = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}.$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis:

Komplementbildung:

- Angenommen, die Klasse der kontextfreien Sprachen wäre bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
- Dann würde für beliebige kontextfreie Sprachen L_1, L_2 gelten $(L_1^c \cup L_2^c)^c = L_1 \cap L_2$ ist wieder kontextfrei.
- Dies ist ein Widerspruch zur ersten Aussage des Satzes.

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

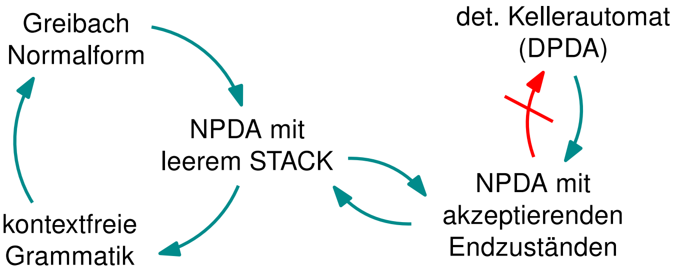
Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	**???**
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA



Greibach-Normalform

Greibach-Normalform
Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach-Normalform**, wenn alle Ableitungsregeln von der Form

$$A \rightarrow a\alpha \text{ mit } A \in V, a \in \Sigma \text{ und } \alpha \in V^*$$

sind.

Satz:
Für jede kontextfreie Grammatik G, für die $L(G)$ das leere Wort nicht enthält, kann eine (äquivalente) kontextfreie Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$ in Greibach-Normalform konstruiert werden.

Beweis – Ersetzung (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (i). Eine Regel

$$A \to \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \to \beta_1, \quad B \to \beta_2, \quad \ldots, \quad B \to \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite B ist, kann durch die Regeln

$$A \to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$$
$$A \to \alpha_1 \beta_2 \alpha_2$$
$$\ldots$$
$$A \to \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

ersetzt werden.

Beweis – Ersetzung (ii)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (ii). Seien

$$A \to A\alpha_1,\ \dots,\ A \to A\alpha_r$$
$$A \to \beta_1,\ \dots,\ A \to \beta_s$$

alle Regeln, deren linke Seite A ist, wobei β_i nicht mit A beginnen. Dann können die Regeln

$$A \to A\alpha_1,\ \dots,\ A \to A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$A \to \beta_1 B,\ \dots,\ A \to \beta_s B$$
$$B \to \alpha_1,\ \dots,\ B \to \alpha_r,$$
$$B \to \alpha_1 B,\ \dots,\ B \to \alpha_r B$$

ersetzt werden. Dabei sei B eine neu eingeführte Variable.

Beweis – Definitionen

Annahme G ist in Chomsky-Normalform mit

$$V = \{A_1, \dots, A_m\}$$
$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

und hat damit ausschließlich Regeln der Form

$$A_i \rightarrow A_j A_k$$
$$A_i \rightarrow a_j \ .$$

Die Grammatik in Greibach-Normalform wird zusätzlich die Variablen $B_1, \dots, B_m$ benutzen. Sei also

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}.$$

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

1.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

2.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$\begin{aligned} A_i &\to A_j A_k \\ A_i &\to a_j \ . \end{aligned}$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

3.Invariante
Symbole aus Σ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$\begin{aligned} A_i &\to A_j A_k \\ A_i &\to a_j \ . \end{aligned}$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

4.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus V beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus V.

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

5.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \dots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen.

Beweis – Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Wir formen G zunächst so um, dass außer Invarianten 1-5 noch die nächste Invariante gilt:

6.Invariante
Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Beweis – Übersicht Invarianten

1.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

2.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

3.Invariante Symbole aus Σ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

4.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus V beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus V.

5.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen.

6.Invariante Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Testen Sie sich: Wann gelten welche Invarianten?

Beweis – Beispielgrammatik

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3A_1,\ A_2 \to 1, \\
&\quad A_3 \to A_1A_2,\ A_3 \to 0\}
\end{aligned}
$$

Beweis – Verfahren Schritt 1

Vorher: Grammatik in Chomsky-Normalform
Nachher: 6. Invariante gilt: Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Aktion: Dabei wenden wir in dieser Reihenfolge an:

Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln $A_1 \to A_1\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_1\alpha$
Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_2\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_1\alpha$
Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_2\alpha$
Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_3\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_4 \to A_1\alpha$
Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_4 \to A_2\alpha$
Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln $A_4 \to A_3\alpha$
Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln $A_4 \to A_4\alpha$

$\vdots$

Beweis – Schritt 1 Beispiel

Ersetzung (i) zur Ersetzung der Regeln $A_3 \to A_1\alpha$

$$\begin{array}{lcl} A & \to & \alpha_1 B \alpha_2 \\ B & \to & \beta_1 | \cdots | \beta_r \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} A & \to & \alpha_1\beta_1\alpha_2 | \cdots | \alpha_1\beta_r\alpha_2 \\ B & \to & \beta_1 | \cdots | \beta_r \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} V & = & \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma & = & \{0, 1\} \\ S & = & A_1 \\ R & = & \{A_1 \to A_2A_3, \\ & & \ A_2 \to A_3A_1 | 1, \\ & & \ A_3 \to A_1A_2 | 0\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} V & = & \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma & = & \{0, 1\} \\ S & = & A_1 \\ R & = & \{A_1 \to A_2A_3, \\ & & \ A_2 \to A_3A_1 | 1, \\ & & \ A_3 \to A_2A_3A_2 | 0\} \end{array}$$

Beweis – Schritt 1 Beispiel

Ersetzung (i) zur Ersetzung der Regeln $A_3 \to A_2\alpha$

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \cdots | \beta_r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &\to \alpha_1\beta_1\alpha_2 | \cdots | \alpha_1\beta_r\alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \cdots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3A_1 | 1, \\ &\quad A_3 \to A_2A_3A_2 | 0\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3A_1 | 1, \\ &\quad A_3 \to A_3A_1A_3A_2, \\ &\quad A_3 \to 1A_3A_2 | 0\} \end{aligned}$$

Beweis – Schritt 1 Beispiel

Ersetzung (ii) zur Ersetzung der Regeln $A_3 \to A_3\alpha$

$$
\begin{aligned}
A &\to A\alpha_1 | \cdots | A\alpha_r \\
A &\to \beta_1 | \cdots | \beta_s
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A &\to \beta_1 B | \cdots | \beta_s B \\
B &\to \alpha_1 | \cdots | \alpha_r, \\
B &\to \alpha_1 B | \cdots | \alpha_r B \\
A &\to \beta_1 | \cdots | \beta_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to A_3 A_1 A_3 A_2, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2\}
\end{aligned}
$$

Beweis – Verfahren Schritt 2

Vorher: Alle Regeln sind von der Form

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a\alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, a \in \Sigma \\ \text{oder } A &\rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^* \end{aligned}$$

Wegen Invariante 6

- beginnen alle Regeln $A_m \rightarrow \alpha$ mit einem $a \in \Sigma$,
- beginnen alle Regeln $A_{m-1} \rightarrow \alpha$ mit einem $a \in \Sigma$ oder mit A_m.

Aktion: Ersetze mit absteigenden k alle Regeln der Form

$$A_k \rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*$$

mittels Ersetzung (i).

Nachher: Alle Regeln mit linker Seite in $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$ sind von der Form

$$A \rightarrow a\alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, a \in \Sigma$$

Beweis – Schritt 2 Beispiel

Ersetzung (i) zur Ersetzung der Regeln $A_2 \to \alpha$, $\alpha \in (V')^*$

$$
\begin{aligned}
A &\to \alpha_1 B \alpha_2 \\
B &\to \beta_1 | \cdots | \beta_r
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A &\to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \cdots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\
B &\to \beta_1 | \cdots | \beta_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 B_3\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1, \\
&\quad A_2 \to 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 B_3\}
\end{aligned}
$$

Beweis – Schritt 2 Beispiel

Ersetzung (i) zur Ersetzung der Regeln $A_1 \to \alpha$, $\alpha \in (V')^*$

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1, \\
&\quad A_2 \to 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to 0 B_3 A_1 A_3, \\
&\quad A_1 \to 1 A_3 A_2 B_3 A_1 A_3, \\
&\quad A_1 \to 0 A_1 A_3 | 1 A_3 A_2 A_1 A_3, \\
&\quad A_1 \to 1 A_3, \\
&\quad A_2 \to 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1, \\
&\quad A_2 \to 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1 | 1, \\
&\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2, \\
&\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3\}
\end{aligned}
$$

Beweis – Verfahren Schritt 3

Vorher: Alle Regeln mit linker Seite in $V' = \{B_1, \dots, B_m\}$ sind von der Form

$$B \quad \to \quad A\alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, A \in V, B \in V'$$

(Vergleiche Invarianten 2 und 5.)

Aktion: Ersetze alle Regeln der Form

$$B_i \to A_j\alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*$$

mittels Ersetzung (i).

Nachher: G ist in Greibach-Normalform.

Beweis – Schritt 3 Beispiel

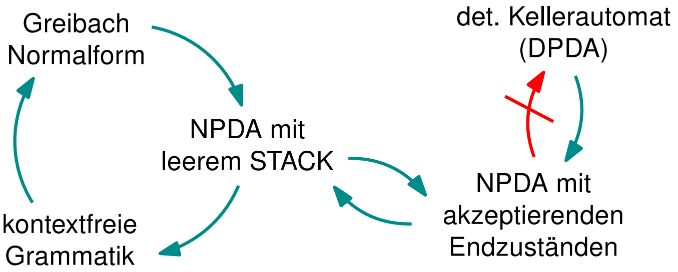
Ersetzung (i) zur Ersetzung der Regeln $B_3 \to A_1\alpha, \alpha \in (V')^*$

$$A_1 \to 1A_3 | 0B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \to 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \to 0A_1A_3 | 1A_3A_2A_1A_3,$$
$$A_2 \to 0B_3A_1 | 1A_3A_2B_3A_1,$$
$$A_2 \to 0A_1 | 1A_3A_2A_1 | 1,$$
$$A_3 \to 0B_3 | 1A_3A_2B_3 | 0 | 1A_3A_2,$$
$$B_3 \to A_1A_3A_2 | A_1A_3A_2B_3$$

$$A_1 \to 0B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \to 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \to 0A_1A_3 | 1A_3A_2A_1A_3 | 1A_3,$$
$$A_2 \to 0B_3A_1 | 1A_3A_2B_3A_1,$$
$$A_2 \to 0A_1 | 1A_3A_2A_1 | 1,$$
$$A_3 \to 0B_3 | 1A_3A_2B_3 | 0 | 1A_3A_2,$$
$$B_3 \to 1A_3A_3A_2 | 0B_3A_1A_3A_3A_2,$$
$$B_3 \to 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2 | 0A_1A_3A_3A_2,$$
$$B_3 \to 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2,$$
$$B_3 \to 1A_3A_3A_2B_3 | 0B_3A_1A_3A_3A_2B_3,$$
$$B_3 \to 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3 | 0A_1A_3A_3A_2B_3,$$
$$B_3 \to 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Typ-0	semi-entscheidbar	$\Longleftrightarrow$	NTM akzeptiert
Typ-1	kontextsensitiv	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{NTAPE}(n)$
Typ-2	kontextfrei	$\Longleftrightarrow$	nichtdet. Kellerautomat (NPDA)
Typ-3	regulär	$\Longleftrightarrow$	DEA / NEA

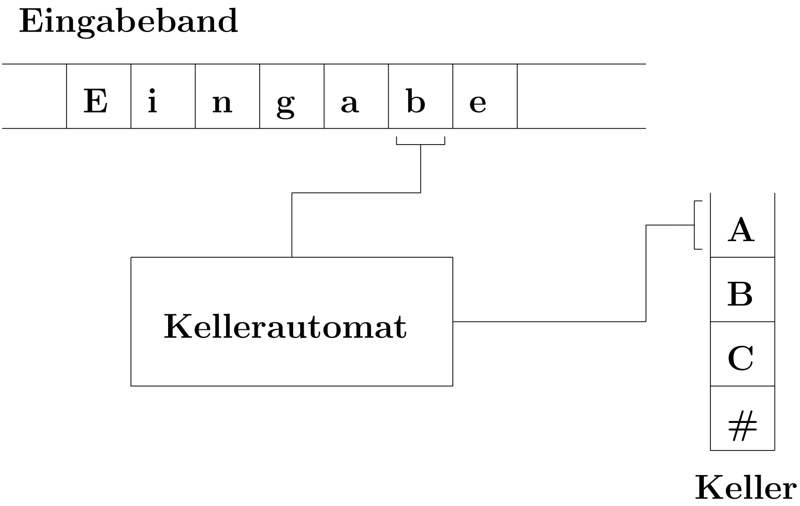


Kellerautomaten

Ein nichtdeterministischer **Kellerautomat** (NPDA, Pushdown Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$, wobei

- Q endliche Zustandsmenge
- Σ endliches Eingabealphabet
- Γ endliches STACK-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ Übergangsrelation, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) \mid q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände,
  $F = \emptyset$ ist möglich.

Kellerautomaten – Visualisierung



Kellerautomaten – Arbeitsweise

Eine **Konfiguration eines NPDA** ist ein Tripel (q, w, α) mit

- $q \in Q$ aktueller Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Zu Konfiguration $(q, w_1 \cdots w_k, Z_1 \cdots Z_m)$ gibt es die **Nachfolgekonfigurationen**:

$$(q', w_2 \cdots w_k, Z_1' \cdots Z_r' Z_2 \cdots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \cdots Z_r') \in \delta(q, w_1, Z_1)$$

und

$$(q', w_1 \cdots w_k, Z_1' \cdots Z_r' Z_2 \cdots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \cdots Z_r') \in \delta(q, \varepsilon, Z_1).$$

Kellerautomaten – Arbeitsweise

Ein NPDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch leeren STACK**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ein NPDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch einen akzeptierenden Endzustand**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Ein NPDA ist **deterministisch** (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$.

Kellerautomaten – Beispiel

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:

- Betrachte beliebiges Wort $w_1 \cdots w_n \# w_n \cdots w_1 \in L$.

Phase 1

- Lies $w_1 \cdots w_n$ und schreibe jeweils w_i auf den STACK bis $\#$ gelesen.

Phase 2

- Lies $w_n \cdots w_1$ und vergleiche den jeweils gelesenen Buchstaben mit dem jeweils obersten Buchstaben auf dem STACK.
  - Gleichheit: Nimm obersten Buchstaben vom STACK
  - Sonst: Stoppe in nichtakzeptierenden Zustand

Phase 3

- Ist nur noch Z_0 auf dem STACK
  - Entferne Z_0
  - Akzeptiere die Eingabe “mit leerem STACK”

Kellerautomaten – Beispiel

Ein DPDA für $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$(Q = \{q_0, q_1, q_2\},\ \Sigma = \{0, 1, \#\},\ \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}),\ q_0,\ Z_0,\ \delta,\ \emptyset)$$

$\delta(q_0, 0, Z_0)$	$=$	$(q_1, 0Z_0)$	Phase 1
$\delta(q_0, 1, Z_0)$	$=$	$(q_1, 1Z_0)$	
$\delta(q_1, 0, 0)$	$=$	$(q_1, 00)$	
$\delta(q_1, 0, 1)$	$=$	$(q_1, 01)$	
$\delta(q_1, 1, 0)$	$=$	$(q_1, 10)$	
$\delta(q_1, 1, 1)$	$=$	$(q_1, 11)$	
$\delta(q_1, \#, 0)$	$=$	$(q_2, 0)$	Trennzeichen gelesen $\Rightarrow$ Zu Phase 2
$\delta(q_1, \#, 1)$	$=$	$(q_2, 1)$	
$\delta(q_2, 0, 0)$	$=$	(q_2, ε)	Phase 2
$\delta(q_2, 1, 1)$	$=$	(q_2, ε)	
$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$	$=$	(q_2, ε)	Phase 3

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[4pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe 001#100

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	001#100	Z_0
q_1	01#100	$0Z_0$
q_1	1#100	$00Z_0$
q_1	#100	$100Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[4pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$
q_2		Z_0

Beispiel – Berechnung für Eingabe $001\#100$

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(q_0, 0, Z_0) & = & (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & (q_1, 1Z_0) \\
\\
\delta(q_1, 0, 0) & = & (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) & = & (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) & = & (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & (q_1, 11) \\
\\
\delta(q_1, \#, 0) & = & (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) & = & (q_2, 1) \\
\\
\delta(q_2, 0, 0) & = & (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) & = & (q_2, \varepsilon) \\
\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & (q_2, \varepsilon)
\end{array}
$$

Zustand	Eingabe	STACK
q_0	$001\#100$	Z_0
q_1	$01\#100$	$0Z_0$
q_1	$1\#100$	$00Z_0$
q_1	$\#100$	$100Z_0$
q_2	100	$100Z_0$
q_2	00	$00Z_0$
q_2	0	$0Z_0$
q_2		Z_0

akzeptiert durch leeren STACK

Kellerautomaten – Beispiel 2

Ein NPDA für $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:

- In diesem Fall fehlt das Trennzeichen.
- Der NPDA funktioniert wie der DPDA aus dem letzten Beispiel.
- Der Übergang in Phase 2 funktioniert allerdings nichtdeterministisch.

Bemerkung:

- Für die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ gibt es keinen DPDA.
- NPDAs können also mehr als DPDAs.

Kellerautomaten – Beispiel 2

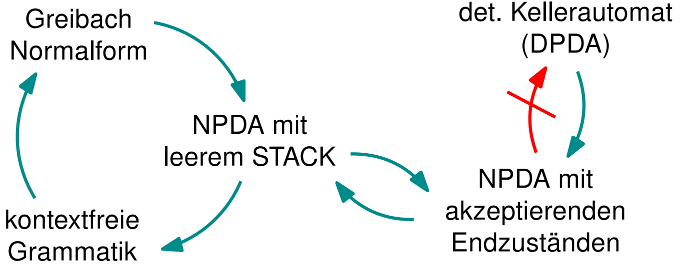
Ein NPDA für $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

$$(Q = \{q_0, q_1, q_2\},\ \Sigma = \{0, 1, \#\},\ \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}),\ q_0,\ Z_0,\ \delta,\ \emptyset)$$

$\delta(q_0, 0, Z_0)$	$=$	$\{(q_1, 0Z_0)\}$	Phase 1
$\delta(q_0, 1, Z_0)$	$=$	$\{(q_1, 1Z_0)\}$	
$\delta(q_1, 0, 0)$	$=$	$\{(q_1, 00), (q_2, \epsilon)\}$	
$\delta(q_1, 0, 1)$	$=$	$\{(q_1, 01)\}$	
$\delta(q_1, 1, 0)$	$=$	$\{(q_1, 10)\}$	
$\delta(q_1, 1, 1)$	$=$	$\{(q_1, 11), (q_2, \epsilon)\}$	
$\delta(q_2, 0, 0)$	$=$	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	Phase 2
$\delta(q_2, 1, 1)$	$=$	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	
$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$	$=$	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	Phase 3

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz:
Zu einem NPDA, der eine Sprache *L* durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert, kann ein NPDA konstruiert werden, der *L* mit leerem STACK akzeptiert.



Beweis – Beschreibung

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ NPDA, der L durch Übergang in einen Zustand aus F_1 akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen NPDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, der L durch leeren STACK akzeptiert.
- Sei q_E ein neuer Zustand.
- Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.

- Lege zu Beginn Z_0^2 vor Z_0^1 auf den STACK, so dass der STACK nicht "versehentlich" geleert werden kann.
- Dann Verfahre wie in $\mathcal{A}_1$.
- Wenn Zustand in F_1 erreicht wird: Gehe zu q_E und leere den STACK

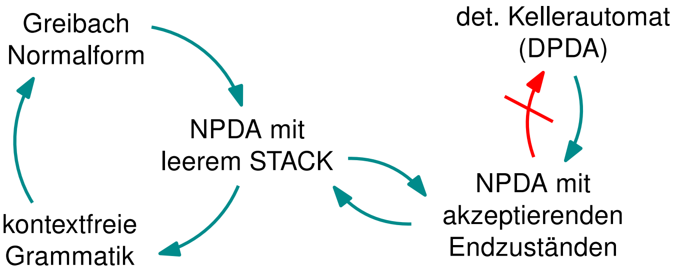
Beweis – Konstruktion

- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ akzeptiert durch Endzustand
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, akzeptiert durch leeren STACK
- Sei q_E ein neuer Zustand.
- Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_E\} \\
\Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\} \\
\delta_2(q_0^2, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_0^1, Z_0^1 Z_0^2)\} \\
\delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z) \text{ für } q \in Q_1,\ a \neq \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
&\qquad\qquad q \in Q_1 \setminus F_1,\ a = \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
\delta_2(q, \varepsilon, Z) &= \delta_1(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } q \in F_1,\ Z \in \Gamma_2 \\
\delta_2(q_E, \varepsilon, Z) &= \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } Z \in \Gamma_2 \\
\delta(\cdot) &= \emptyset \text{ sonst}
\end{aligned}
$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz:
Zu einem NPDA, der eine Sprache L mit leerem STACK akzeptiert, kann ein NPDA konstruiert werden, der L durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert.



Beweis – Beschreibung

Karlsruher Institut für Technologie

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1)$, ein NPDA der $w \in L$ mit leerem STACK akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen NPDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2, F_2)$, der genau die $w \in L$ durch Übergang in einen Zustand $q \in F_2$ akzeptiert.
- Sei Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.
- Sei q_F ein neuer (End-)Zustand.
- Sei q_0^2 ein neuer (Anfangs-)Zustand.

Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.

- Lege zu Beginn Z_0^2 vor Z_0^1 auf den STACK, und lösche Z_0^2 nur, wenn die Abarbeitung von $\mathcal{A}_1$ durch leeren STACK akzeptiert hätte.
- Gehe in Endzustand q_F, wenn $\mathcal{A}_1$ durch leeren STACK akzeptiert hätte.

Beweis – Konstruktion

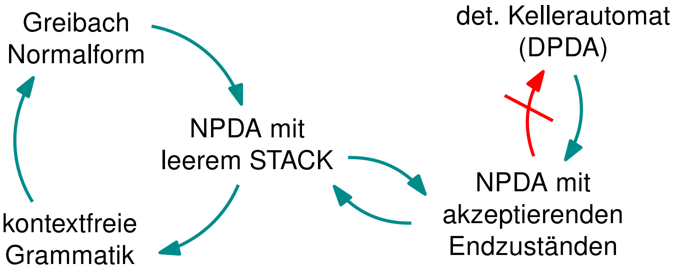
- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ akzeptiert durch leeren STACK.
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, akzeptiert durch Endzustand.
- q_0^2 neuer Anfangszustand.
- q_F neuer (End-)Zustand.
- Z_0^2 ein neues STACK-Symbol.

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_F\}, \\
F_2 &= \{q_F\} \\
\Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2(q_0^2, a, X) &= \begin{cases} \{q_0^1, Z_0^1 Z_0^2\} & \text{falls } a = \varepsilon \text{ und } X = Z_0^2 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\
\delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z), \text{ falls } q \in Q_1, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ und } Z \in \Gamma_1 \\
\delta_2(q, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_F, \varepsilon)\} \text{ für } q \in Q_1.
\end{aligned}
$$

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2

Satz:
Für eine Grammatik G in Greibach-Normalform kann ein NPDA konstruiert werden, der $L(G)$ mit leerem STACK akzeptiert.



Beweis

- Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine Grammatik in Greibach Normalform.
- Konstruiere gewünschten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

$$\begin{aligned} Q &:= \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S \\ \delta(q_0, a, A) &:= \{(q_0, \alpha) \mid (A \to a\alpha) \in R\} \end{aligned}$$

Per Induktion über die Länge i einer Ableitung beweisen wir:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}$ kann beim Lesen von $w_1 \cdots w_i$ den STACK-Inhalt $A_1 \cdots A_m$ erzeugen. Möglicherweise ist $A_1 \cdots A_m = \epsilon$.

Daraus folgt:

- $\mathcal{A}$ erkennt $w_1 \cdots w_n$ mit leerem STACK $\Leftrightarrow S \xrightarrow{*} w_1 \cdots w_n$ in $L(G)$

Beweis

$$\begin{aligned} Q &:= \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S \\ \delta(q_0, a, A) &:= \{(q_0, \alpha) \mid (A \to a\alpha) \in R\} \end{aligned}$$

Induktionsanfang ist mit $i = 0$ trivialerweise erfüllt.
Induktionsschritt:
Sei $i \geq 1$ und "$\xrightarrow{j}$" stehe für eine Ableitung der Länge j. Dann gilt

$$S \xrightarrow{i} w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m \iff \begin{array}{l} \exists A' \in V, r \in \{1, \ldots, m\} \text{ mit} \\ S \xrightarrow{i-1} w_1 \cdots w_{i-1} A' A_r \cdots A_m \\ \to w_1 \cdots w_i A_1 \cdots A_m. \end{array}$$

Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass

- $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \cdots w_{i-1}$ lesen und dabei STACK-Inhalt $A' A_r \cdots A_m$ erzeugen kann, und
- $A' \to w_i A_1 \cdots A_{r-1}$ Regel von G ist.

Beweis

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) \mid (A \to a\alpha) \in R\}$$

Induktionsanfang ist mit $i = 0$ trivialerweise erfüllt.
Induktionsschritt:
Sei $i \geq 1$ und "$\xrightarrow{j}$" stehe für eine Ableitung der Länge j.
Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\}$ so, dass

- $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \cdots w_{i-1}$ lesen und dabei STACK-Inhalt $A' A_r \cdots A_m$ erzeugen kann, und
- $A' \to w_i A_1 \cdots A_{r-1}$ Regel von G ist.

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \cdots w_i$ lesen und dabei den STACK-Inhalt $A_1 \cdots A_m$ erzeugen kann.

Ein Maschinenmodell für Chomsky-2