

# Theoretische Grundlagen der Informatik

## Vorlesung am 18. Oktober 2018

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

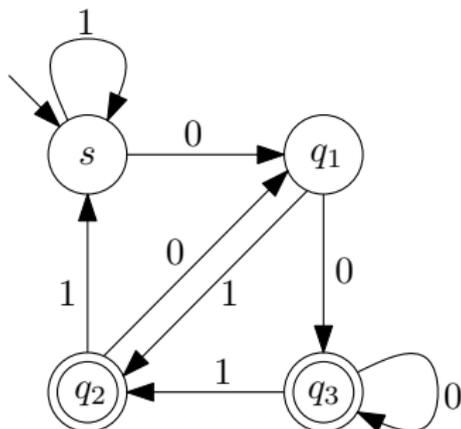


$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$L' = \{w0z \mid w \in \Sigma^*, z \in \Sigma\}$$

Sprache aller Wörter über  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  
deren vorletztes Zeichen eine 0 ist.

$L' = (\{0\} \cup \{1\})^* \cdot \{0\} \cdot (\{0\} \cup \{1\})$   
ist regulär.



Ein DEA der  $L'$  erkennt.

- Gibt es zu jeder regulären Sprache einen endlichen Automaten, der diese erkennt?
- Falls ja: Wie kann man diesen konstruieren?
- Welche Sprachen werden durch endliche Automaten erkannt?

**Satz:**

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

**Erinnerung:** Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt *regulär*, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt: (induktive Definition)

- Verankerung:
  - $L = \{a\}$  mit  $a \in \Sigma$  oder
  - $L = \{\varepsilon\}$  oder
  - $L = \emptyset$
- Induktion: Es gibt reguläre Sprachen  $L_1, L_2$  sodass
  - $L = L_1 \cdot L_2$  oder
  - $L = L_1 \cup L_2$  oder
  - $L = L_1^*$

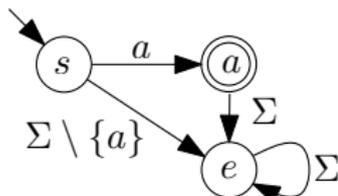
## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

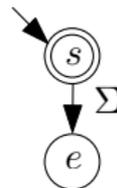
- $L := L(\alpha)$  reguläre Sprache über  $\Sigma$ , die durch  $\alpha$  beschreibbar ist
- Induktion über  $n = \text{Anzahl der } \cup, \cdot \text{ und } * \text{-Zeichen in } \alpha$
- **Induktionsanfang**  $n = 0$  :



$L = \emptyset$



$L = \{a\}$



$L = \{\epsilon\}$

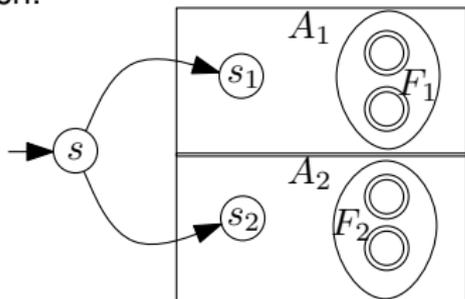
- **Induktionsannahme:** Für alle  $L$ , die durch reguläre Ausdrücke mit weniger als  $n$  Operationen beschreibbar sind, existiert akzeptierender DEA

## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

### ■ Induktionsschluss:

- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$  oder  $L = L_1 \cdot L_2$  oder  $L = L_1^*$
- **Fall 1:**  $L = L_1 \cup L_2$
- Sei  $A_1$  DEA der  $L_1$  akzeptiert und  $A_2$  DEA der  $L_2$  akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus  $A_1$  und  $A_2$  Automaten der  $L$  akzeptiert
- 1. Versuch:

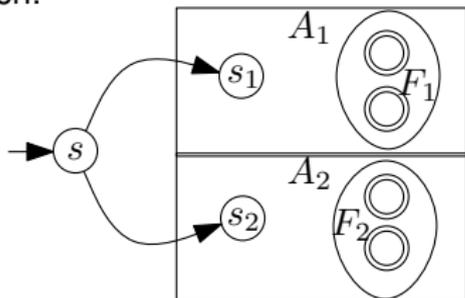


## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

### ■ Induktionsschluss:

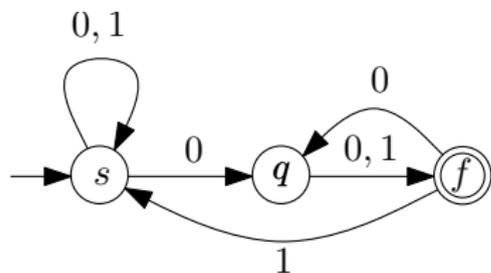
- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$  oder  $L = L_1 \cdot L_2$  oder  $L = L_1^*$
- **Fall 1:**  $L = L_1 \cup L_2$
- Sei  $A_1$  DEA der  $L_1$  akzeptiert und  $A_2$  DEA der  $L_2$  akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus  $A_1$  und  $A_2$  Automaten der  $L$  akzeptiert
- 1. Versuch:



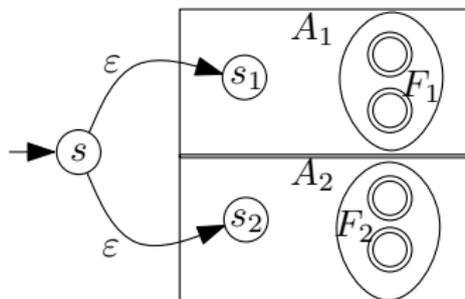
- Brauche Übergang ohne Lesen eines Zeichens mit Wahlmöglichkeit
- DEA's erlauben das nicht
- Rest des Beweises: später!

- Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (NEA) besteht aus:
  - $Q$ , einer endlichen Zustandsmenge;
  - $\Sigma$ , einem endlichen Alphabet;
  - $\delta$ , einer Übergangsfunktion  $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$
  - $s$ , einem Startzustand;
  - $F$ , einer Menge von Endzuständen;
- Interpretation von  $\delta$ :
  - Bei Abarbeitung eines Symbols  $a$  von Zustand  $q$  kann der Automat sich **nichtdeterministisch „aussuchen“** in welchen Zustand aus der Teilmenge  $\delta(q, a)$  er übergeht
  - Auch möglich: Springe spontan ohne Lesen eines Zeichens aus  $\Sigma$  in neuen Zustand aus Teilmenge  $\delta(q, \varepsilon)$  ( $\varepsilon$ -Übergang)
- Ein nichtdeterministischer endlicher Automat **akzeptiert** eine Wort  $w \in \Sigma^*$ , wenn es eine Folge von Übergängen gibt, so dass er bei Eingabe von  $w$  in einen Endzustand gelangt, d.h. bei Eingabe von  $w$  ein Endzustand **erreichbar** ist.

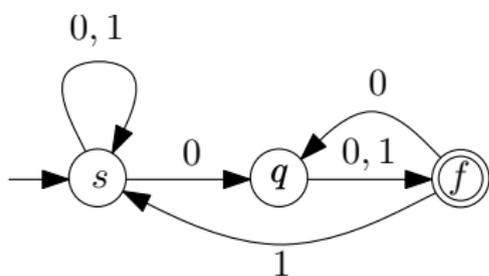
## Beispiel 1:



## Beispiel 2:

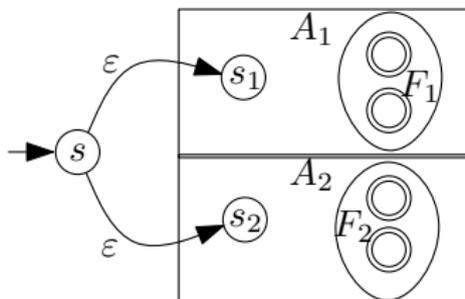


## Beispiel 1:



- $\delta(s, 0) = \{s, q\}$
- $w = 10$  wird nicht akzeptiert
- $w = 01$  wird akzeptiert
- Sprache aller Wörter über  $\{0, 1\}$ , deren vorletztes Zeichen 0 ist

## Beispiel 2:



**Definition:**

Zwei endliche Automaten, die dieselbe Sprache akzeptieren, heißen *äquivalent*.

**Satz:**

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

**Definition:**

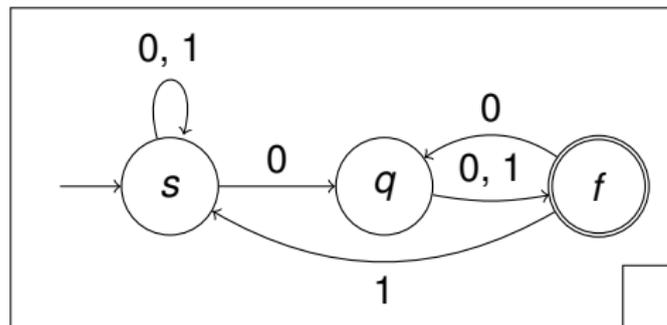
Zwei endliche Automaten, die dieselbe Sprache akzeptieren, heißen *äquivalent*.

**Satz:**

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

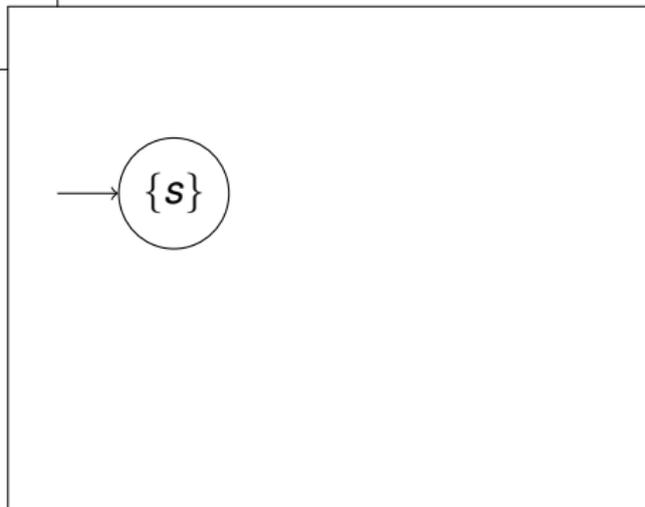
Beweis durch Potenzmengenkonstruktion

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

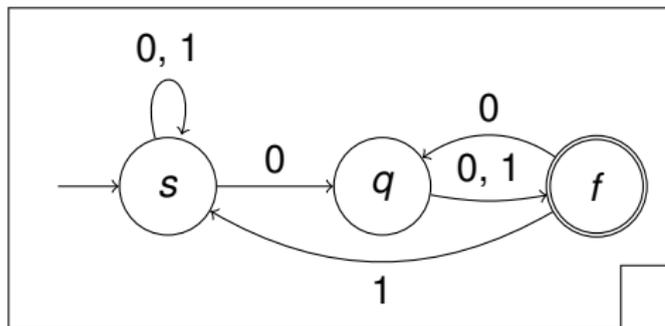


← NEA

DEA →

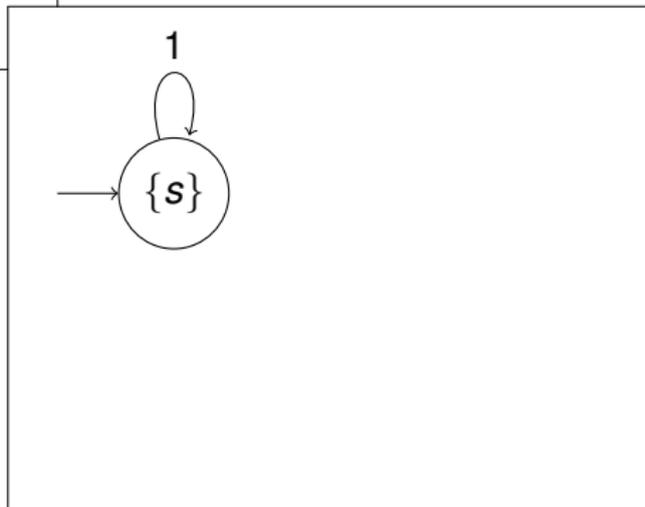


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

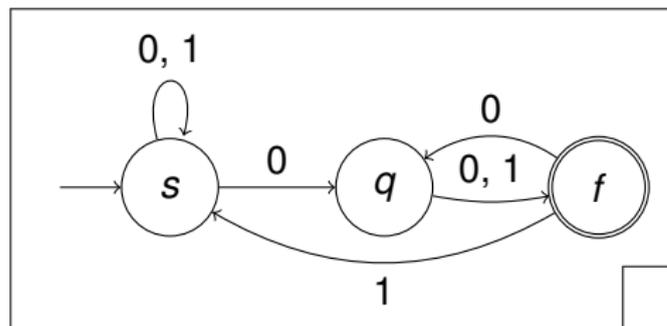


← NEA

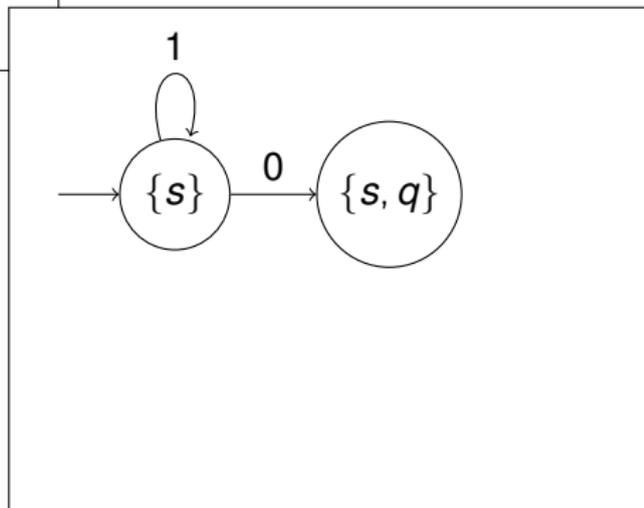
DEA →



# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

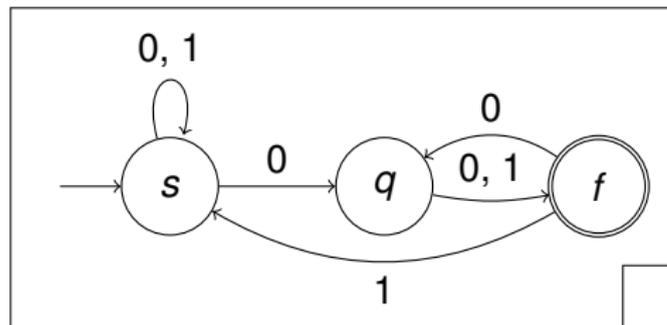


← NEA



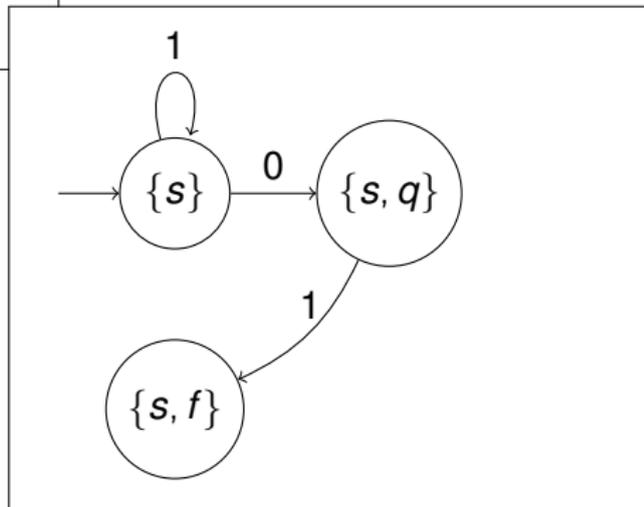
DEA →

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

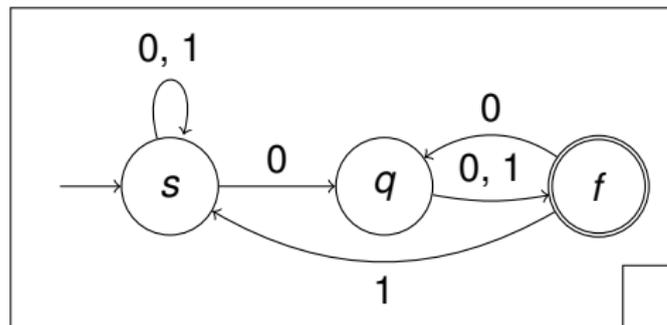


← NEA

DEA →

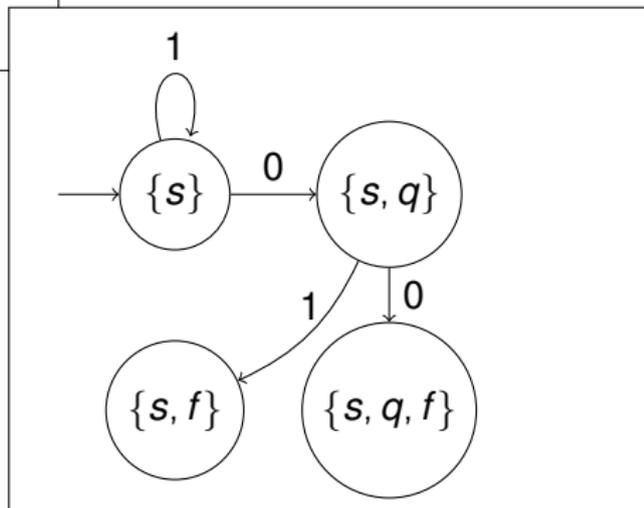


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

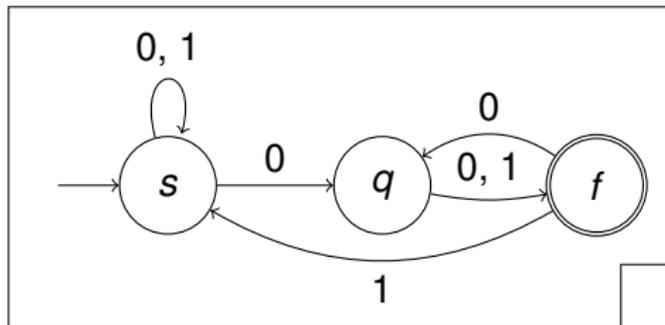


← NEA

DEA →

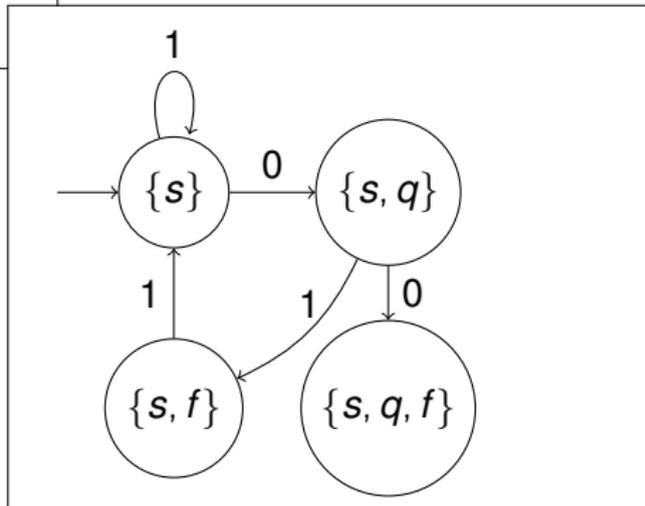


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

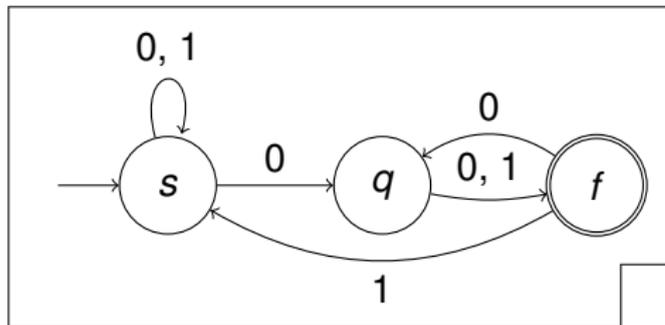


← NEA

DEA →

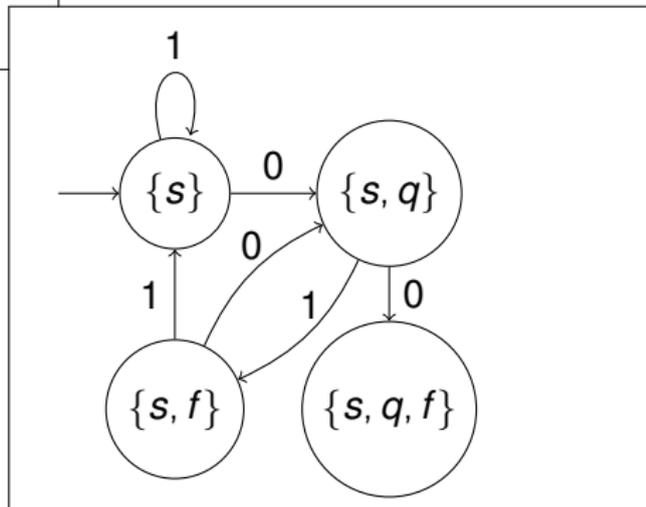


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

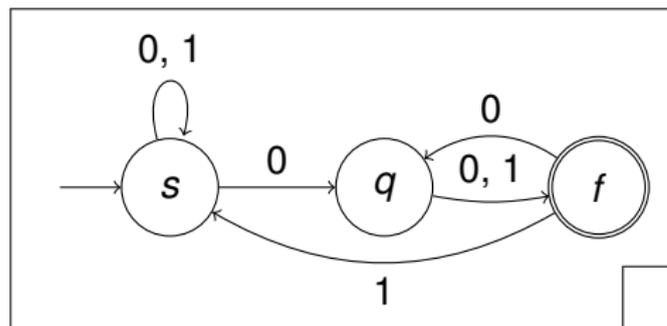


← NEA

DEA →

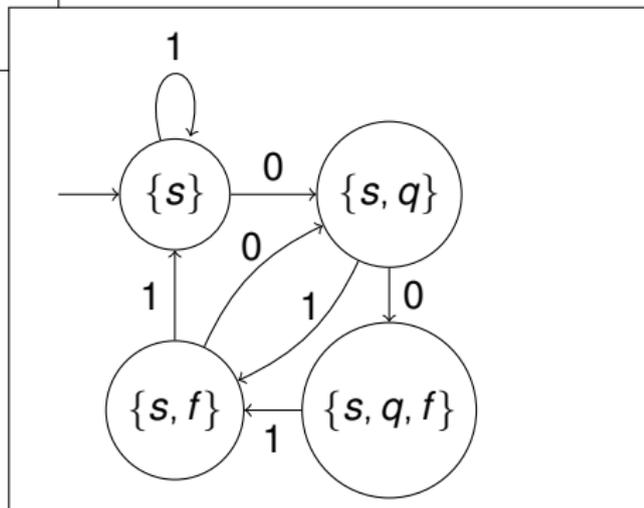


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

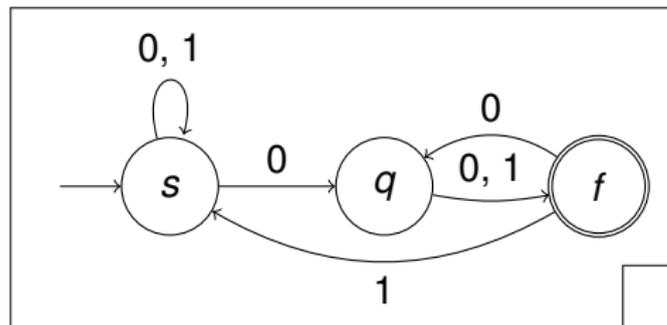


← NEA

DEA →

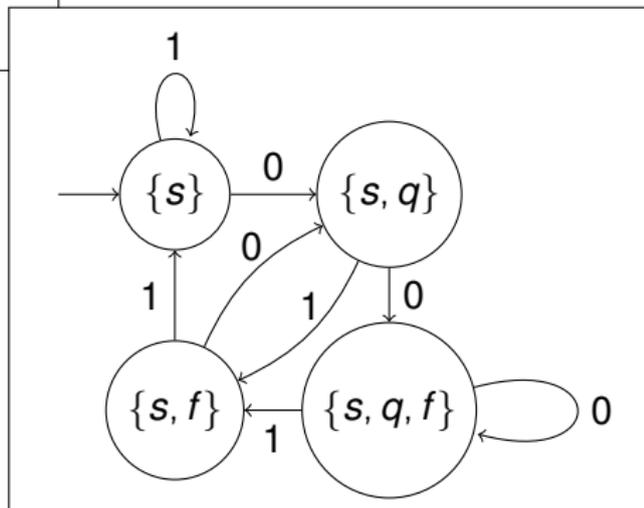


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

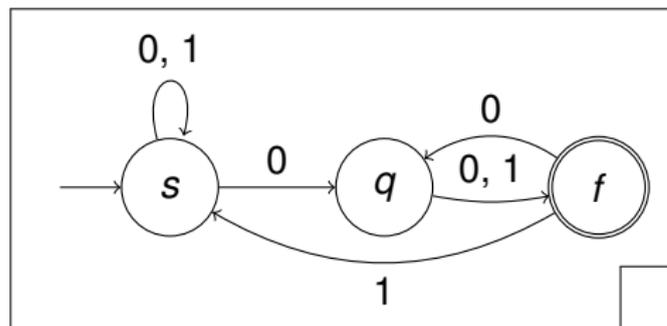


← NEA

DEA →

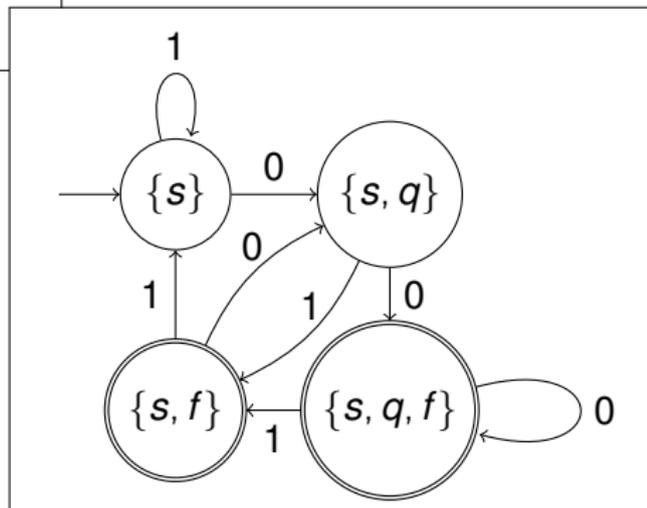


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



← NEA

DEA →



## Definition:

Für einen Zustand  $q \in Q$  ist der  $\varepsilon$ -Abschluss  $E(q)$  wie folgt definiert:

$$E(q) := \{p \in Q \mid p \text{ ist von } q \text{ durch } \varepsilon\text{-Übergänge erreichbar}\}$$

Beachte, dass gilt:

- $E(q) \subseteq Q$ ,  $E(q) \in 2^Q$
- $q \in E(q)$ , d.h. die Folge von  $\varepsilon$ -Übergängen darf auch leer sein

$E(q_1)$

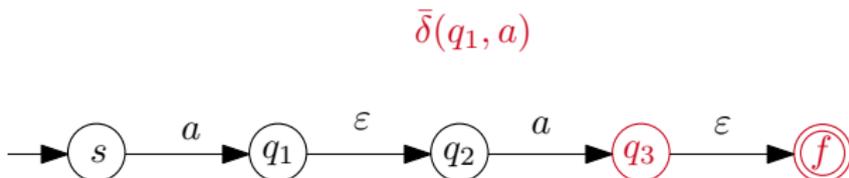


# Erweiterung $\bar{\delta}$ von $\delta$

Idee: Berücksichtige  $\varepsilon$ -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Beim Lesen eines einzelnen Zeichens

$$\bar{\delta}: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$
$$\bar{\delta}(q, a) = \begin{cases} E(q) & \text{falls } a = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in E(q)} \left( \bigcup_{r \in \delta(p, a)} E(r) \right) & \text{für } a \in \Sigma \end{cases}$$



# Erweiterung $\bar{\delta}$ von $\delta$

Idee: Berücksichtige  $\varepsilon$ -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Erweiterung auf Mengen von Zuständen :

$$\bar{\delta}: 2^Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(P, a) = \begin{cases} \bigcup_{p \in P} E(p) & \text{falls } a = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in P} \bar{\delta}(p, a) & \text{für } a \in \Sigma \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(\{s, q_1\}, a)$$



# Erweiterung $\bar{\delta}$ von $\delta$

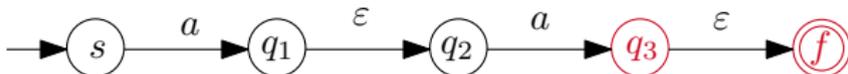
Idee: Berücksichtige  $\varepsilon$ -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Induktive Erweiterung auf Wörter:

$$\bar{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(q, w) = \begin{cases} E(q) & \text{falls } w = \varepsilon \\ \bar{\delta}(q, w) & \text{falls } w = a \in \Sigma \\ \bigcup_{p \in \bar{\delta}(q, v)} \bar{\delta}(p, a) & \text{falls } w = va, a \in \Sigma, |v| > 0 \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(s, w = aa)$$



- Es gilt:  $w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \bar{\delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset!$

# Erweiterung $\bar{\delta}$ von $\delta$

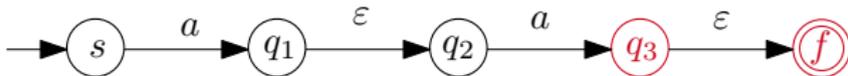
Idee: Berücksichtige  $\varepsilon$ -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Analog für Mengen von Zuständen:

$$\bar{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(P, w) = \bigcup_{p \in P} \bar{\delta}(p, w)$$

$$\bar{\delta}(\{s, q_1\}, w = aa)$$



**Definition:**

Zwei endliche Automaten, die dieselbe Sprache akzeptieren, heißen *äquivalent*.

**Satz:**

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

**Satz:**

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

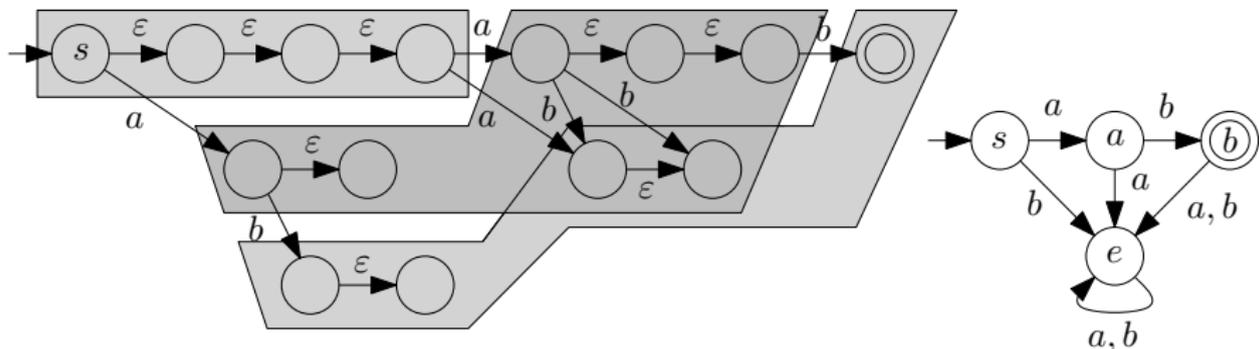
**Beweisidee:**

- Sei  $\mathcal{A}$  NEA
- Falls  $\mathcal{A}$   $w$  akzeptiert, so gibt es eine Abarbeitung, die in einem Endzustand endet
- Falls ein Zustand  $q$  bei der Eingabe von  $w$  erreichbar ist, so sind das auch alle Zustände in  $E(q)$
- „Simuliere“  $\mathcal{A}$  durch einen DEA
- Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen von  $\mathcal{A}$
- Endzustände des DEA sind alle Mengen, die Endzustände von  $\mathcal{A}$  enthalten

### Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

**Beispiel:** Mögliche Abarbeitungen von  $w = ab$  in einem NEA mit  $ab \in L$ ,  $a \notin L$  und äquivalenter DEA



### Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

**Potenzmengenkonstruktion:** Gegeben sei ein NEA  $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ . Wir konstruieren daraus einen DEA  $\tilde{\mathcal{A}} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ :

- $\tilde{Q} = 2^Q$ , d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.
- $\tilde{\delta}: \tilde{Q} \times \Sigma \rightarrow \tilde{Q}$  mit  $\tilde{\delta}(\tilde{q}, a) = \bar{\delta}(\tilde{q}, a)$  für  $a \in \Sigma$ . Es ist also  $\tilde{q} \subseteq Q$  und jeder Zustand wird mit seinem  $\varepsilon$ -Abschluss im NEA identifiziert.
- $\tilde{s} := E(s)$
- $\tilde{F} := \{\tilde{q} \in \tilde{Q} \mid \tilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$

### Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

- Zeige per Induktion über  $n = |w|$ , dass für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, w) = \bar{\delta}(s, w)$$

- Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(\tilde{\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) \in \tilde{F} \Leftrightarrow \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bar{\delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

- **Induktionsanfang**  $n = 0$ , d.h.  $w = \varepsilon$ :

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, \varepsilon) = \bar{\delta}(E(s), \varepsilon) = \cup_{p \in E(s)} E(p) = E(s) = \bar{\delta}(s, \varepsilon)$$

## Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

- **Induktionsannahme:** Für alle Wörter  $w'$  mit  $|w'| \leq n$  gilt:

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, w') = \bar{\delta}(s, w')$$

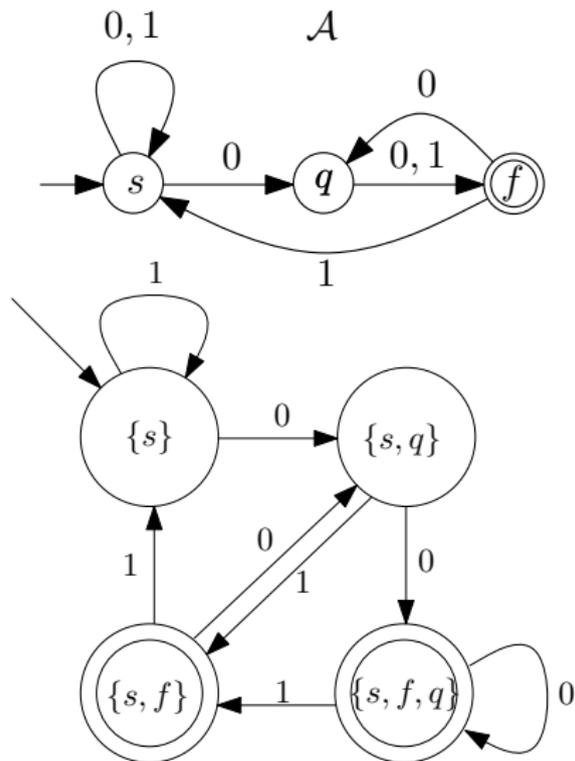
- **Induktionsschluss**  $|w| = n + 1$ :

Sei  $w = w'a$  mit  $|w'| = n$  und  $a \in \Sigma$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) &= \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(\tilde{s}, w'), a) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \tilde{\delta}(\bar{\delta}(s, w'), a) \\ &\stackrel{\text{Def } \tilde{\delta}}{=} \bar{\delta}(\bar{\delta}(s, w'), a) = \bigcup_{p \in \bar{\delta}(s, w')} \bar{\delta}(p, a) = \bar{\delta}(s, w) \end{aligned}$$

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion:

- $L = (0 \cup 1)^* 0(0 \cup 1)$
- NEA  $\mathcal{A}$  akzeptiert  $L$
- Konstruiere DEA für  $L$ :
  - $\tilde{s} = E(s) = \{s\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s\}, 0) = \{s, q\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s\}, 1) = \{s\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, q\}, 0) = \{s, q, f\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, q\}, 1) = \{s, f\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, q, f\}, 0) = \{s, q, f\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, q, f\}, 1) = \{s, f\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, f\}, 0) = \{s, q\}$
  - $\tilde{\delta}(\{s, f\}, 1) = \{s\}$
  - Alle anderen Zustände können gestrichen werden



**Satz:**

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

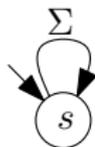
**Erinnerung:** Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt *regulär*, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt: (induktive Definition)

- Verankerung:
  - $L = \{a\}$  mit  $a \in \Sigma$  oder
  - $L = \emptyset$
  - $L = \{\varepsilon\}$
- Induktion: Seien  $L_1, L_2$  reguläre Sprachen
  - $L = L_1 \cdot L_2$  oder
  - $L = L_1 \cup L_2$  oder
  - $L = L_1^*$

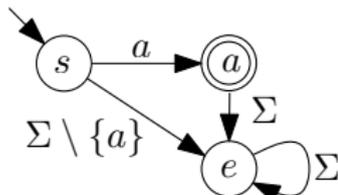
## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

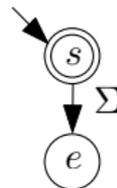
- $L := L(\alpha)$  reguläre Sprache über  $\Sigma$ , die durch  $\alpha$  beschreibbar ist
- Induktion über  $n = \text{Anzahl der } \cup, \cdot \text{ und } * \text{-Zeichen in } \alpha$
- **Induktionsanfang**  $n = 0$  :



$L = \emptyset$



$L = \{a\}$



$L = \{\epsilon\}$

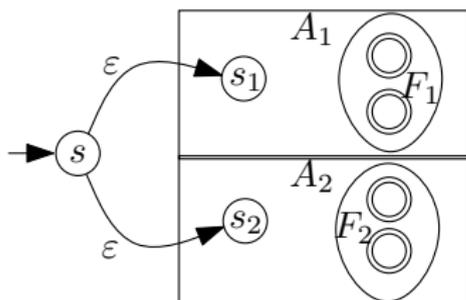
- **Induktionsannahme:** Für alle  $L$ , die durch reguläre Ausdrücke mit weniger als  $n$  Operationen beschreibbar sind, existiert akzeptierender DEA

## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

### ■ Induktionsschluss:

- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$  oder  $L = L_1 \cdot L_2$  oder  $L = L_1^*$
- **Fall 1:**  $L = L_1 \cup L_2$
- Sei  $A_1$  DEA, der  $L_1$  akzeptiert und  $A_2$  DEA, der  $L_2$  akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus  $A_1$  und  $A_2$  Automaten, der  $L$  akzeptiert

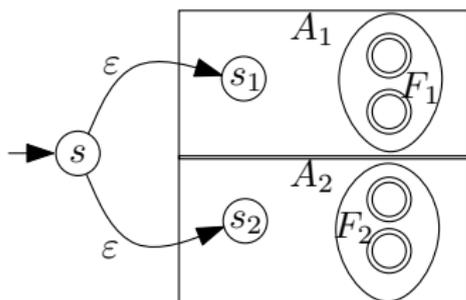


## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

### ■ Induktionsschluss:

- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$  oder  $L = L_1 \cdot L_2$  oder  $L = L_1^*$
- **Fall 1:**  $L = L_1 \cup L_2$
- Sei  $A_1$  DEA, der  $L_1$  akzeptiert und  $A_2$  DEA, der  $L_2$  akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus  $A_1$  und  $A_2$  Automaten, der  $L$  akzeptiert



- NEA's können Übergang ohne Lesen eines Zeichens mit Wahlmöglichkeit
- NEA's können in DEA's umgebaut werden

## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

## Beweis (Fortsetzung):

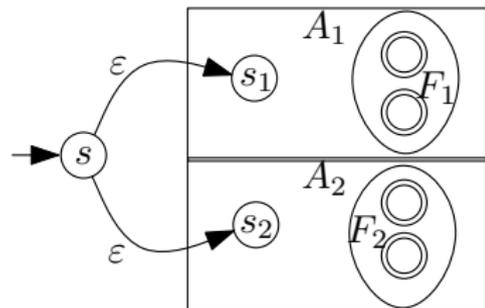
- **Fall 1:**  $L = L_1 \cup L_2$
- NEA  $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ , der  $L_1 \cup L_2$  erkennt:

- $Q := Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$  ( $s \notin Q_i$ )

- $F = F_1 \cup F_2$

- $\delta$ :

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_i(q, a)\} & , q \in Q_i, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus \{s\}, a = \varepsilon \\ \{s_1, s_2\} & , q = s, a = \varepsilon \\ \emptyset & , q = s, a \neq \varepsilon \end{cases}$$



## Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

## Beweis (Fortsetzung):

- **Fall 2:**  $L = L_1 \cdot L_2$
- NEA  $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ , der  $L_1 \cdot L_2$  erkennt:

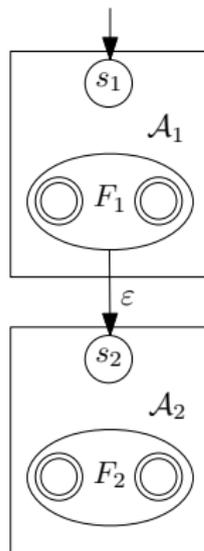
- $Q := Q_1 \cup Q_2$

- $s := s_1$

- $F := F_2$

- $\delta:$

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_i(q, a)\} & , q \in Q_i, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus F_1, a = \varepsilon \\ \{s_2\} & , q \in F_1, a = \varepsilon \end{cases}$$



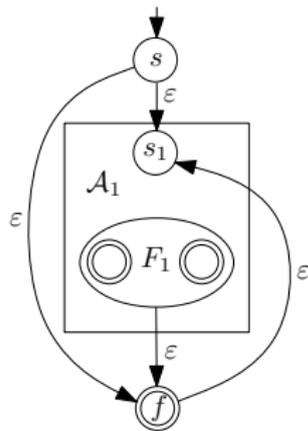
### Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

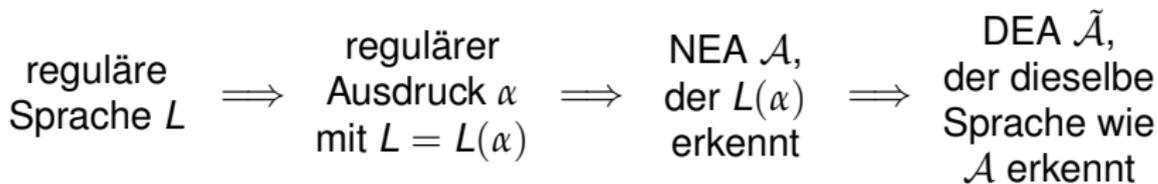
### Beweis (Fortsetzung):

- **Fall 3:**  $L = L_1^*$
- NEA  $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ , der  $L_1^*$  erkennt:
  - $Q := Q_1 \cup \{s, f\}$ , ( $s, f \notin Q_1$ )
  - $\delta$ :

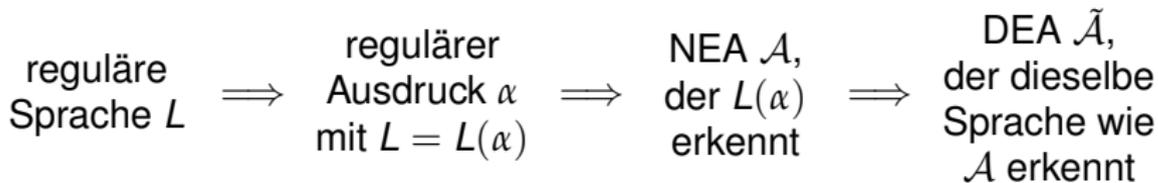
$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_1(q, a)\} & , q \in Q_1, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q_1 \setminus F_1, a = \varepsilon \\ \{f\} & , q \in F_1 \cup \{s\}, a = \varepsilon \\ \emptyset & , q \in \{s, f\}, a \neq \varepsilon \\ \{s_1\} & , q \in \{s, f\}, a = \varepsilon \end{cases}$$



- Reguläre Sprachen  $L$  sind induktiv definiert.
- Reguläre Ausdrücke  $\alpha$  beschreiben reguläre Sprachen, d.h.  $L = L(\alpha)$ .
- Zu jedem regulären Ausdruck  $\alpha$  gibt es einen NEA der  $L(\alpha)$  erkennt.
- Zu jedem NEA gibt es einen DEA der die gleiche Sprache erkennt.



- Reguläre Sprachen  $L$  sind induktiv definiert.
- Reguläre Ausdrücke  $\alpha$  beschreiben reguläre Sprachen, d.h.  $L = L(\alpha)$ .
- Zu jedem regulären Ausdruck  $\alpha$  gibt es einen NEA der  $L(\alpha)$  erkennt.
- Zu jedem NEA gibt es einen DEA der die gleiche Sprache erkennt.



## Ausblick:

- Was können NEAs mit Wahlmöglichkeiten, aber ohne  $\varepsilon$ -Übergänge?
- Gibt es Sprachen, die NEAs erkennen, die aber nicht regulär sind?
- Gibt es Sprachen, die NEAs nicht erkennen?

## Testen Sie sich:

Sei  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{, \} \cup \{.\}$ .

Sei  $L_{\mathbb{R}} \subseteq \Sigma^*$  die Sprache aller endlichen Dezimaldarstellungen von positiven reellen Zahlen.

Beispiele:  $1.024,48 \in L_{\mathbb{R}}$  und  $42 \in L_{\mathbb{R}}$   
aber  $1024,48 \notin L_{\mathbb{R}}$  und  $042,00 \notin L_{\mathbb{R}}$  und  $.,.123 \notin L_{\mathbb{R}}$

↪ Finden Sie einen DEA oder NEA für  $L_{\mathbb{R}}$ ?