Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik Übung

2. Übungstermin · 8. November 2018

Jonas Sauer

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · LEHRSTUHL ALGORITHMIK

Termine

Dienstags		Donnerstags	
16.10.	Vorlesung	18.10.	Vorlesung
23.10.	Vorlesung	25.10.	Übung
30.10.	Vorlesung	01.11.	Feiertag
06.11.	Vorlesung	08.11.	Übung
13.11.	Vorlesung	15.11.	Vorlesung
20.11.	Übung	22.11.	Vorlesung
27.11.	Vorlesung	29.11.	Übung
04.12.	Vorlesung	06.12.	Vorlesung
11.12.	Übung	13.12.	Vorlesung
18.12.	Vorlesung	20.12.	Übung
08.01.	Vorlesung	10.01.	fällt aus
15.01.	Vorlesung	17.01.	Übung
22.01.	Vorlesung	24.01.	Vorlesung
29.01.	Übung	31.01.	Vorlesung
05.02.	Vorlesung	07.02.	Übung

Gliederung

Karlsruher Institut für Technologie

Inhalt

- Pumping-Lemma
- Bestimmung eines regulären Ausdrucks
- Minimierung von Automaten
  - Entfernen überflüssiger Zustände
  - Äquivalenzklassenkonstruktion
- Nerode-Relation
- Cantors 2. Diagonalargument

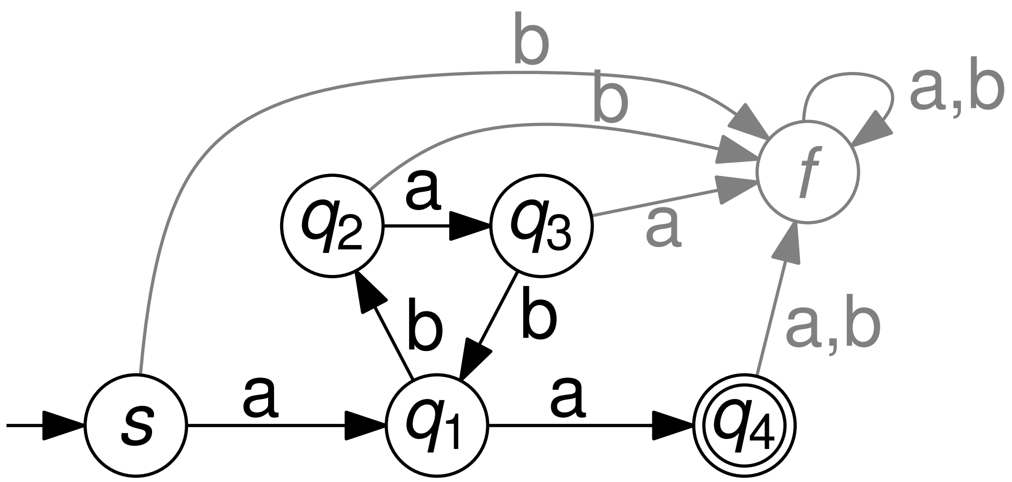
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

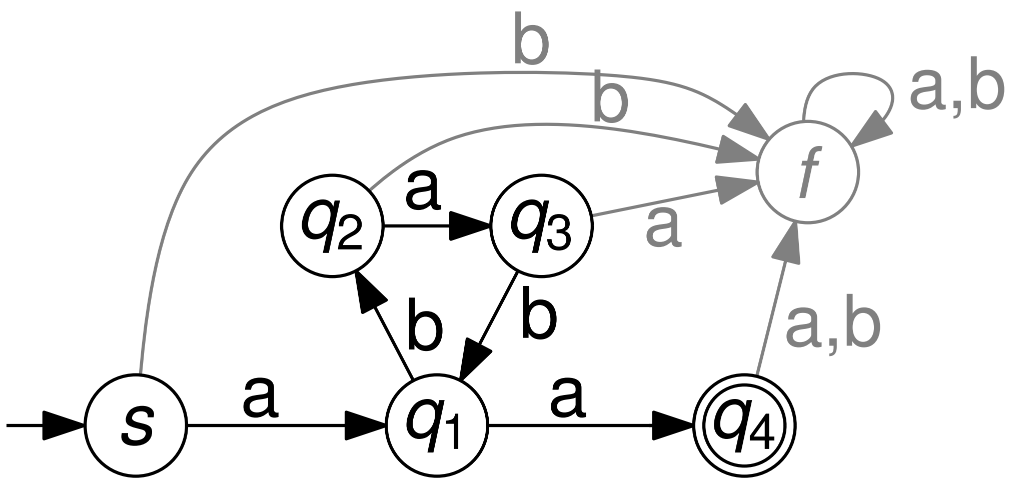
Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und $\mathcal{A}$ entsprechender endlicher Automat.



Pumping-Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

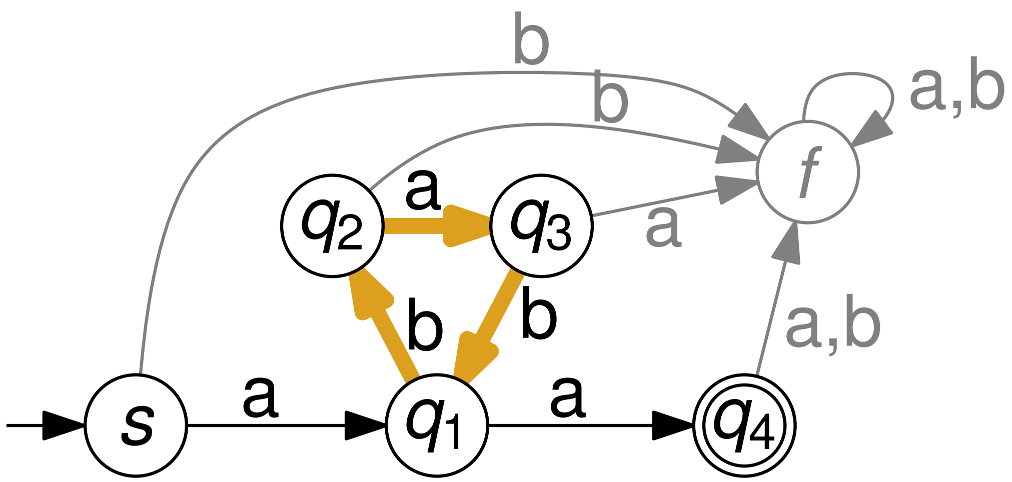
$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und $\mathcal{A}$ entsprechender endlicher Automat.

Egal wie viele Zustände für $\mathcal{A}$ verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als $\mathcal{A}$ Zustände, gilt:

Während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{A}$.



Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und $\mathcal{A}$ entsprechender endlicher Automat.

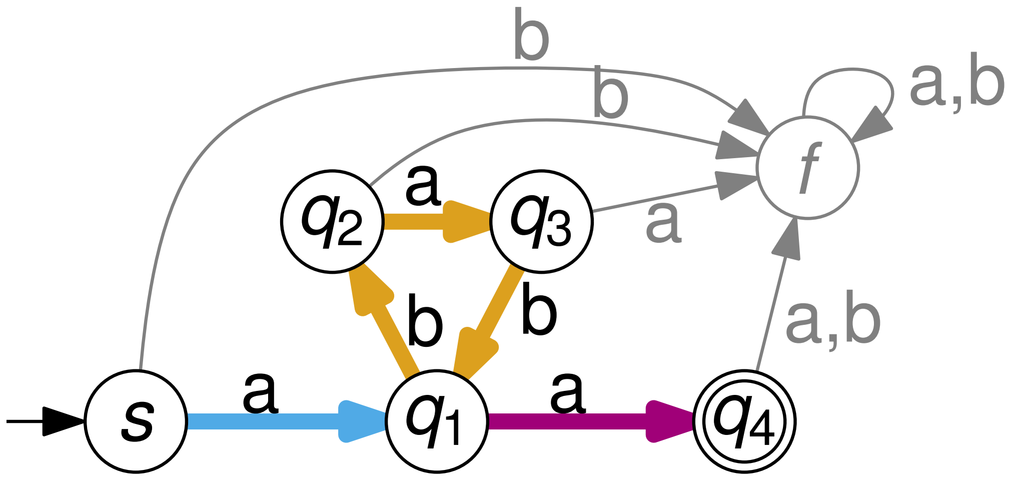
Egal wie viele Zustände für $\mathcal{A}$ verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als $\mathcal{A}$ Zustände, gilt:

Während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{A}$.

Sei

- u das Teilwort von w, das vor $\mathcal{Z}$,
- v das Teilwort von w, das in $\mathcal{Z}$, und
- x das Teilwort von w, das nach $\mathcal{Z}$

abgearbeitet wird.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und $\mathcal{A}$ entsprechender endlicher Automat.

Egal wie viele Zustände für $\mathcal{A}$ verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als $\mathcal{A}$ Zustände, gilt:

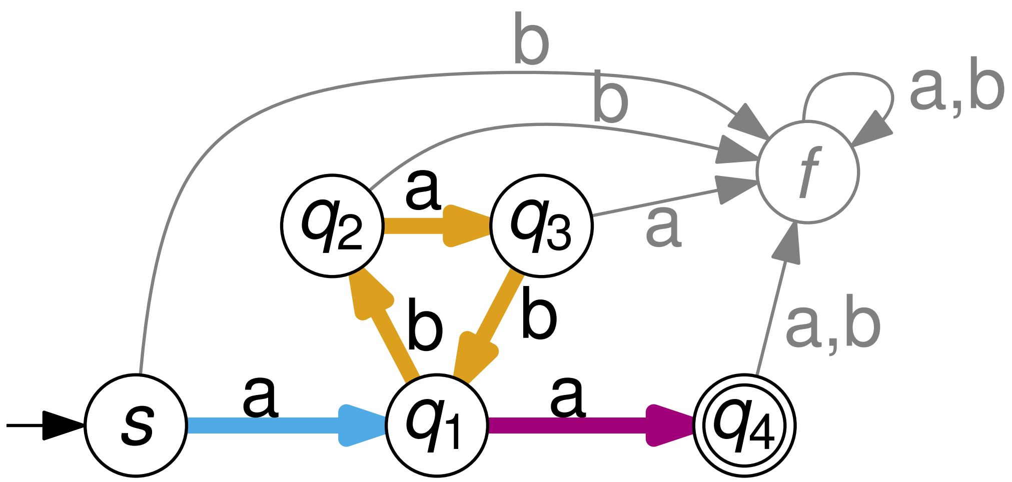
Während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{A}$.

Sei

- u das Teilwort von w, das vor $\mathcal{Z}$,
- v das Teilwort von w, das in $\mathcal{Z}$, und
- x das Teilwort von w, das nach $\mathcal{Z}$

abgearbeitet wird.

→ uv^ix (mit $i \in \mathbb{N}_0$) ist auch in L enthalten.
Durchlaufe $\mathcal{Z}$ entsprechend häufig.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0:$
gilt	$uv^ix \in L$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx$, $\lvert uv \rvert \leq n$, $v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0 :$
gilt	$uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert $\exists n \in \mathbb{N}$

für alle $\forall w \in L$ mit $|w| > n$

existiert $\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, |uv| \leq n, v \neq \varepsilon$

für alle $\forall i \in \mathbb{N}_0 :$

gilt $uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

für alle $\forall n \in \mathbb{N}$

existiert $\exists w \in L$ mit $|w| > n$

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0 :$
gilt	$uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$
existiert	$\exists w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
für alle	$\forall u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0 :$
gilt	$uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$
existiert	$\exists w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
für alle	$\forall u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
existiert	$\exists i \in \mathbb{N}_0 :$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Aussage des Pumping-Lemmas

existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
existiert	$\exists u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0 :$
gilt	$uv^i x \in L$

Umkehrung der Aussage des Pumping-Lemmas

für alle	$\forall n \in \mathbb{N}$
existiert	$\exists w \in L$ mit $\lvert w \rvert > n$
für alle	$\forall u, v, x \in \Sigma^\star$ mit $w = uvx, \lvert uv \rvert \leq n, v \neq \varepsilon$
existiert	$\exists i \in \mathbb{N}_0 :$
gilt	$uv^i x \notin L$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

(b) $L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^\star \mid w$ enthält das Teilwort 000 genauso häufig wie das Teilwort 111$\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^\star \mid$ auf jedes Symbol 0 in w folgt das Symbol 1 und nach maximal dreimal 1 in w folgt das Symbol 0. $\}$

(e) $L_5 = \{a\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

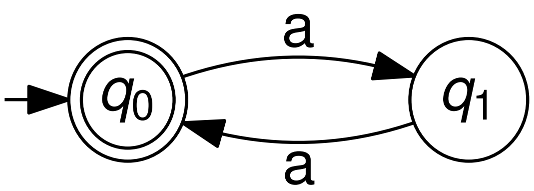
(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

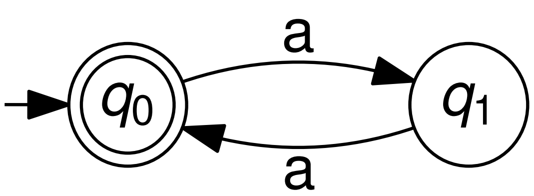
(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$



Aussage des Pumping-Lemmas ist erfüllt:

"$\exists$" Wähle $n = 2$.

"$\forall$" Betrachte beliebiges $w \in L$ mit $|w| > 2$.

$\Rightarrow w = a^{2j}$ mit $j \geq 2$.

"$\exists$" Wähle Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$, $v = aa$, $x = a^{2(j-1)}$.

"$\forall$" Für alle $i \in \mathbb{N}_0$: $uv^ix = a^{2i}a^{2(j-1)} = a^{2(i+j-1)} \in L$.

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(b) $L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(b) $L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

Zeige Umkehrung des Aussage des Pumping-Lemmas:

"$\forall$" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Sei $m = n + 1$.

"$\exists$" Wähle das Wort $w = a^{m^2} \in L_2$. Es gilt $|w| \geq m > n$.

"$\forall$" Betrachte beliebige Zerlegung $w = u\,v\,x \in L_2$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$.

Beschreibe alle so möglichen Zerlegungen als: $\underbrace{a^p}_{u}\;\underbrace{a^q}_{v}\;\underbrace{a^r}_{x}$

mit $p + q + r = m^2$, $p + q \leq n$ und $1 \leq q \leq n$.

"$\exists$" Wähle $i = 2$. Zeige: $u\,v^2\,x \notin L_2$.

$$|a^{m^2}| < |uv^2x| = |a^p a^{2q} a^r| = |a^{m^2} a^q| \leq |a^{m^2} a^n| < |a^{m^2} a^{2m} a| = |a^{(m+1)^2}|$$

Es gibt kein $j \in \mathbb{N}$, sodass $|\, uv^2x \,| = a^{j^2}$.

✗

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^\star \mid w$ enthält das Teilwort 000 genauso häufig wie das Teilwort 111$\}$

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^\star \mid w$ enthält das Teilwort 000 genauso häufig wie das Teilwort 111$\}$

Zeige Umkehrung des Aussage des Pumping-Lemmas:

"$\forall$" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

"$\exists$" Wähle das Wort $w = (000)^n(111)^n \in L_3$. Es gilt $|w| > n$.

"$\forall$" Betrachte beliebige Zerlegung $w = u\,v\,x \in L_3$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$.

Beschreibe alle so möglichen Zerlegungen als: $\underbrace{0^p}_{u}\ \underbrace{0^q}_{v}\ \underbrace{0^{3n-p-q}\ (111)^n}_{x}$

mit $p + q \leq n$ und $1 \leq q \leq n$.

"$\exists$" Wähle $i = 2$. Zeige: $u\,v^2\,x \notin L_3$.

$$0^p\ 0^{2q}\ 0^{3n-p-q}\ (111)^n = 0^{3n+q}\ (111)^n \notin L_3$$

✗

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

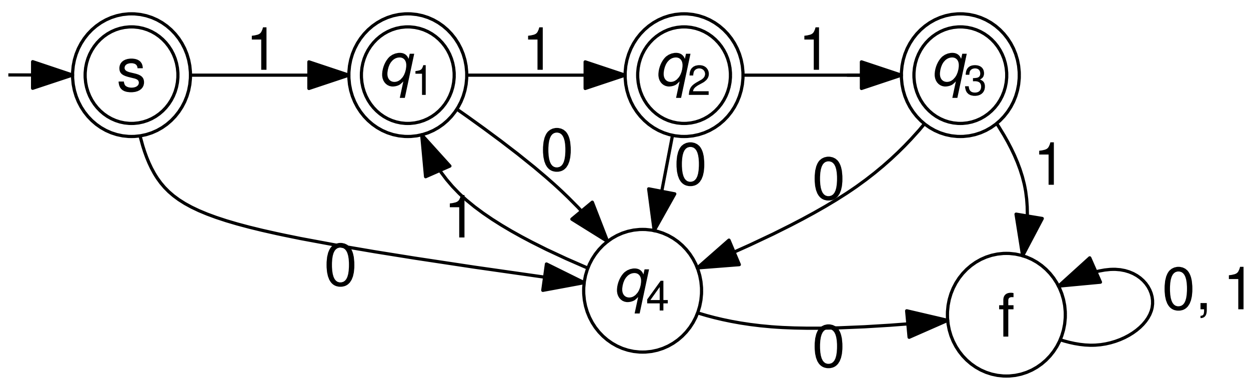
(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^\star \mid$ auf jedes Symbol 0 in w folgt das Symbol 1 und nach maximal dreimal 1 in w folgt das Symbol 0. $\}$

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^\star \mid$ auf jedes Symbol 0 in w folgt das Symbol 1 und nach maximal dreimal 1 in w folgt das Symbol 0. $\}$

✓



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

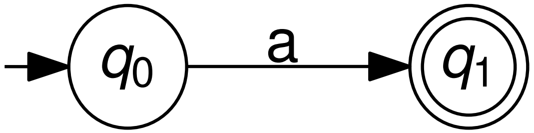
(e) $L_5 = \{a\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(e) $L_5 = \{a\}$

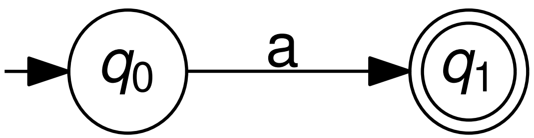


✓

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(e) $L_5 = \{a\}$

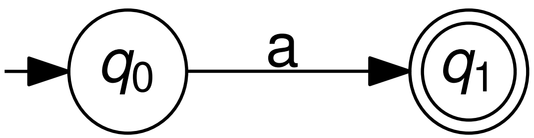


kein Zyklus $\rightarrow$ Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt?

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(e) $L_5 = \{a\}$



kein Zyklus $\rightarrow$ Aussage des Pumping-Lemmas nicht erfüllt?

Doch:

"∃" Wähle $n = 1$.

"∀" Betrachte beliebiges $w \in L$ mit $|w| > 1$.

$\Rightarrow$ gibt es nicht!

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ✓

(b) $L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ✗

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^\star \mid w$ enthält das Teilwort 000 genauso häufig wie das Teilwort 111$\}$ ✗

(d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^\star \mid$ auf jedes Symbol 0 in w folgt das Symbol 1 und nach maximal dreimal 1 in w folgt das Symbol 0. $\}$ ✓

(e) $L_5 = \{a\}$ ✓

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^{2^i} \in \{a,b\}^\star \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ✓

✗

Mit dem Pumping-Lemma kann man nicht zeigen, dass eine Sprache regulär ist, man kann es höchstens widerlegen!

wie

✗

und

nach maximal dreimal 1 in w folgt das Symbol 0. } ✓

(e) $L_5 = \{a\}$

✓

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

= Sprache, die jedes Wort w enthält, für das gilt: Wenn man in $\mathcal{A}$ im Zustand q_r startet, w abarbeitet und dabei nur die Zustände $q_1, \ldots, q_{i+1}$ benutzt, endet man in Zustand q_t.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

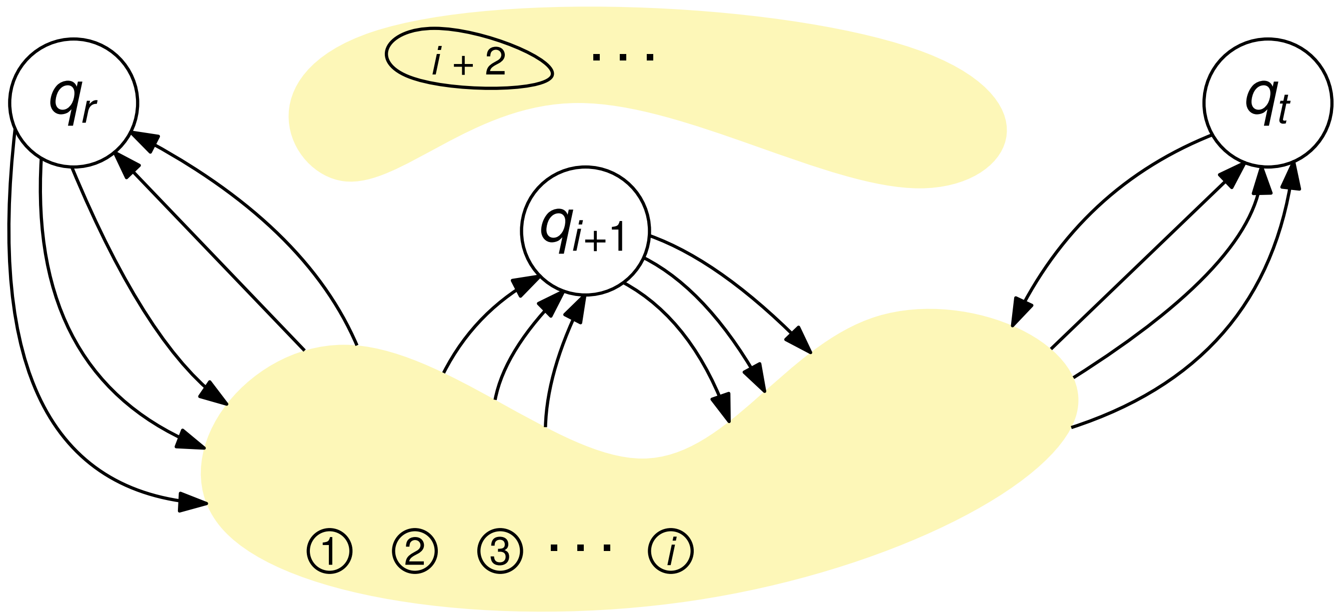
Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Erklärung:



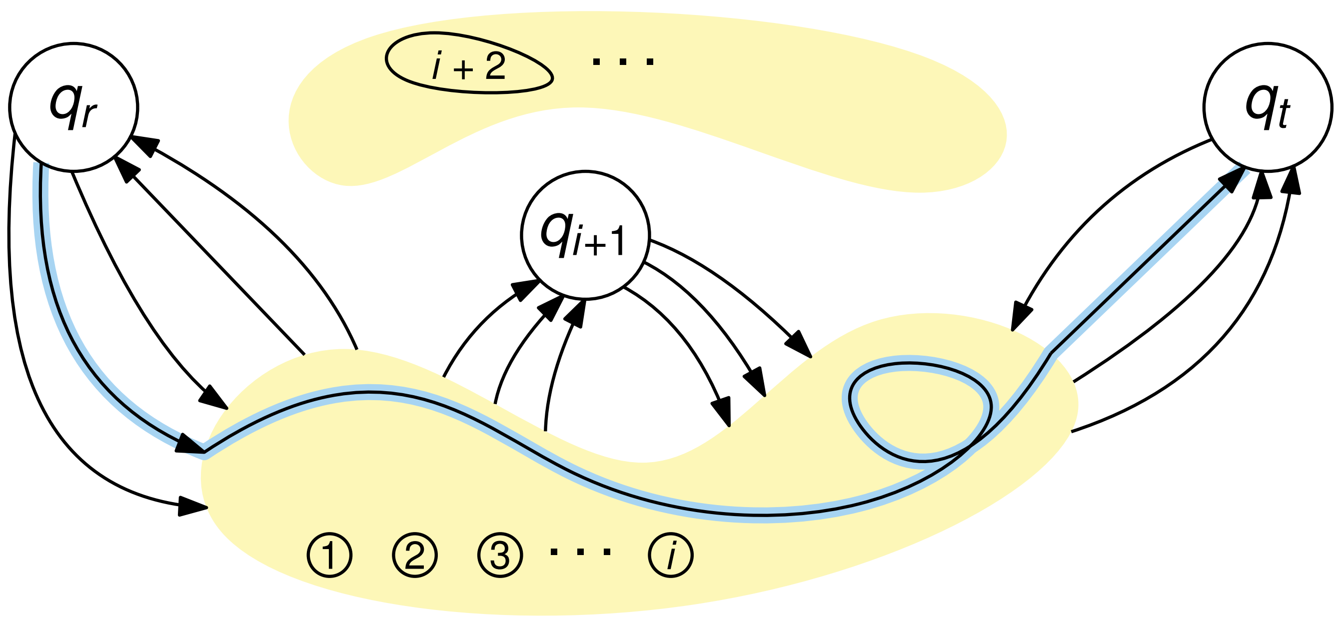
Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = \boxed{L_{q_r,i,q_t}} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}}(L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Erklärung:



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

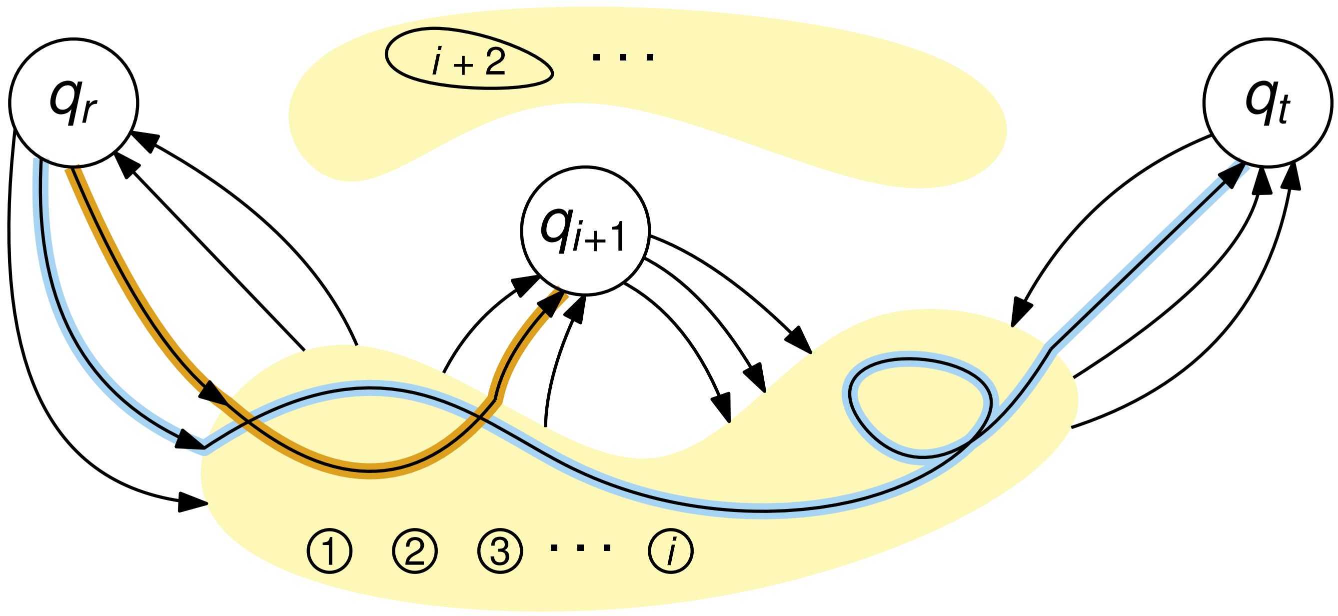
Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Erklärung:



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

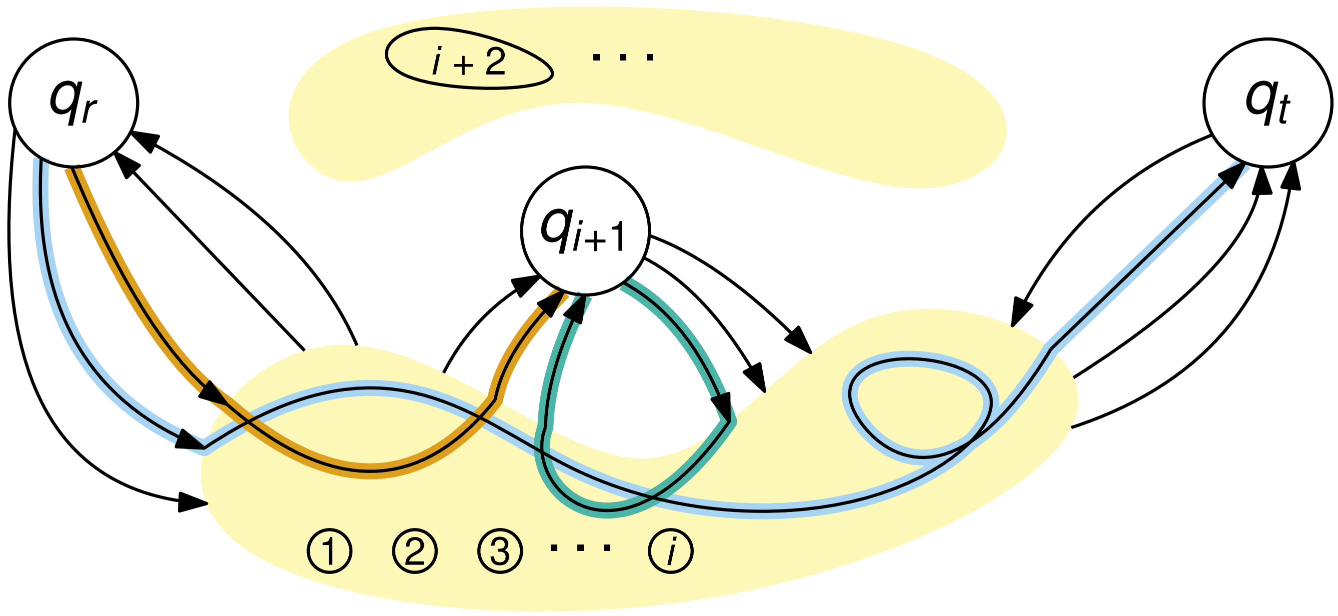
Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Erklärung:



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

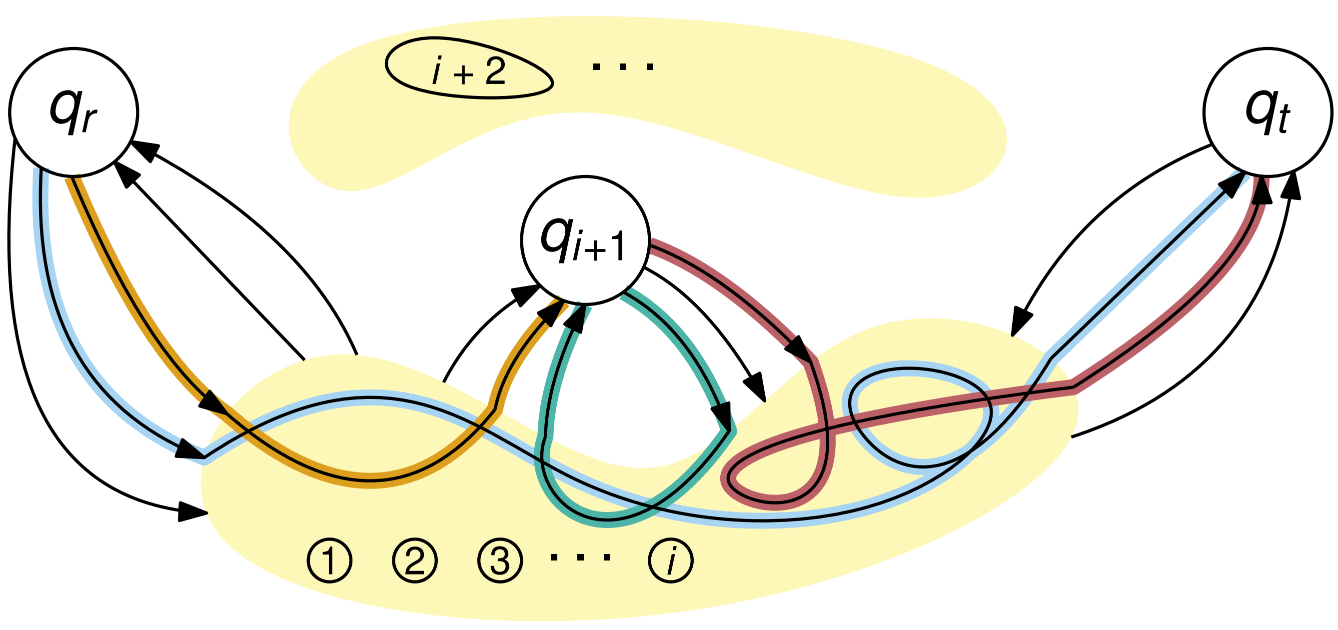
Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Gegeben: deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$

Gesucht: regulärer Ausdruck, der $L(\mathcal{A})$ erzeugt

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} \left(L_{q_{i+1},i,q_{i+1}} \right)^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

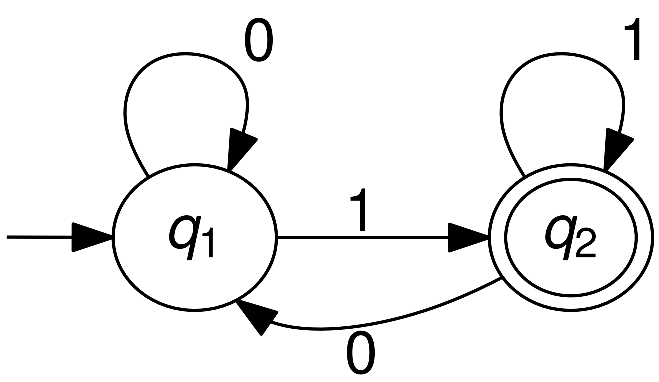
Erklärung:



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

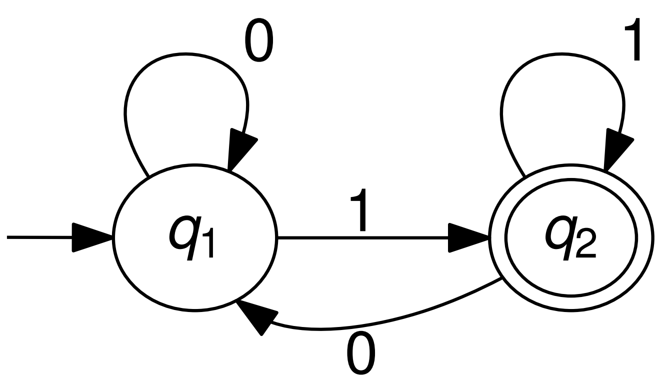
Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

$L_{1,2,2}$

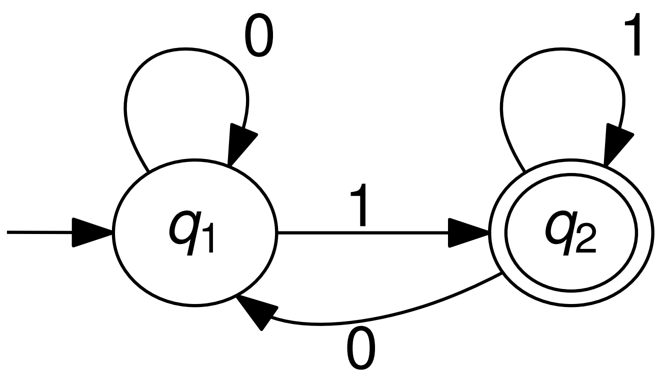


$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2})$$

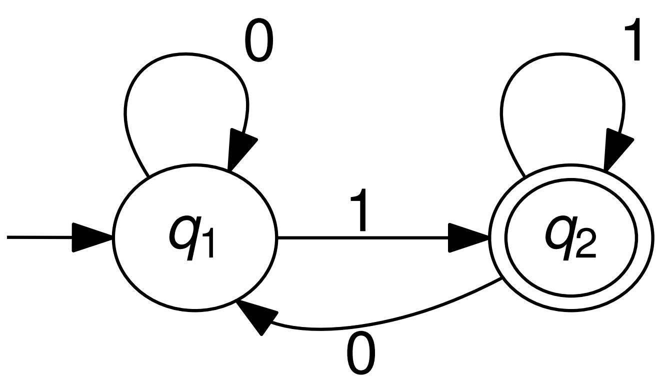


$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

$$\begin{aligned} L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\ L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \end{aligned}$$



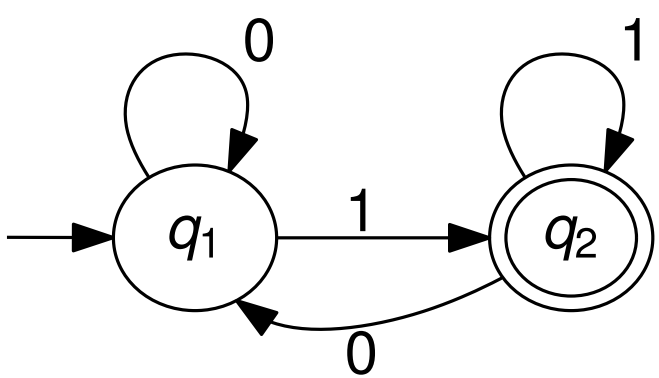
$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

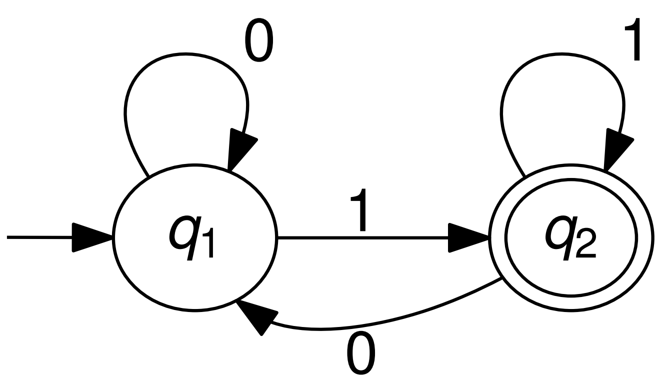
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2})
\end{aligned}
$$



$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



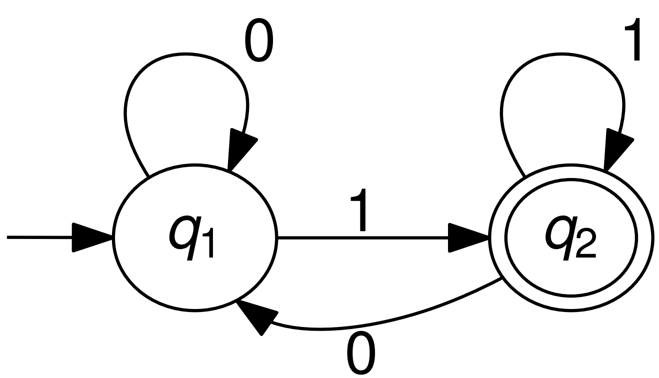
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



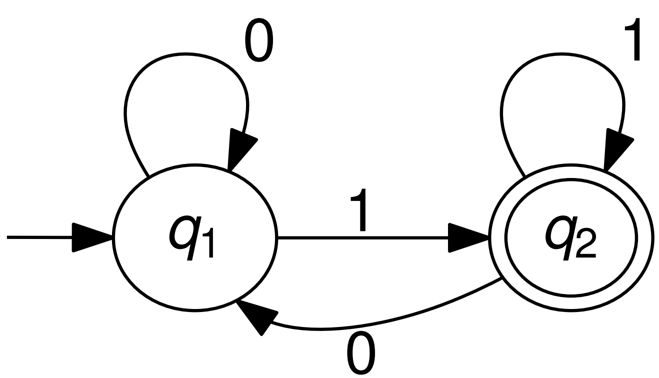
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Karlsruher Institut für Technologie

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

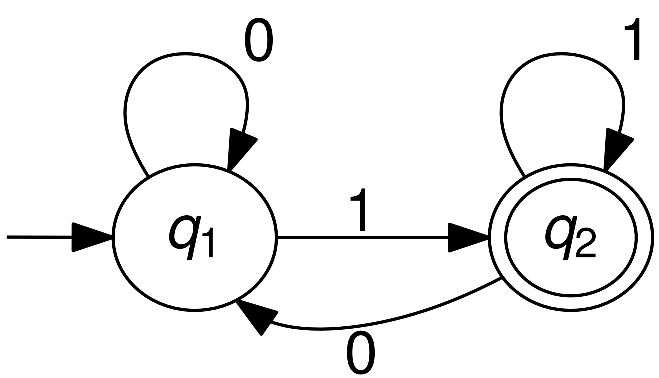


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



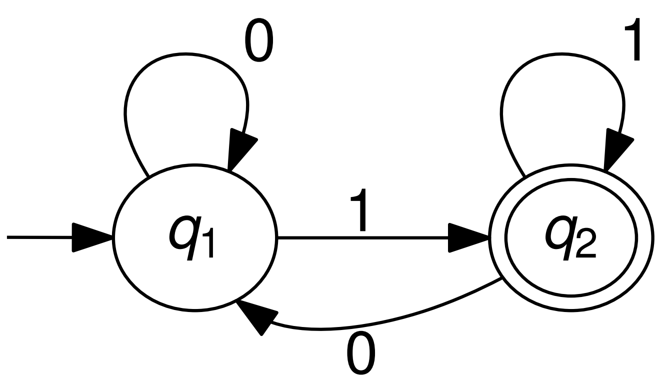
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

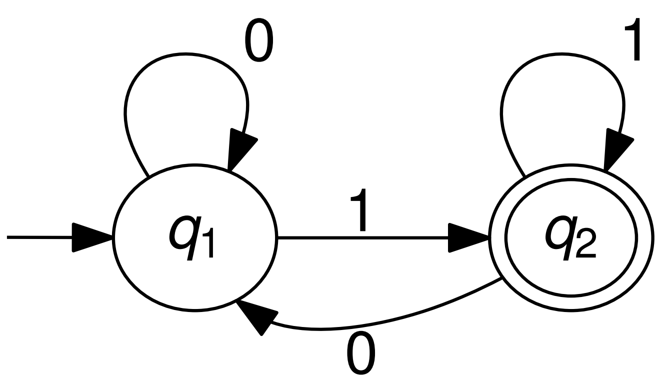


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^\star_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^\star_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^\star_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^\star L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



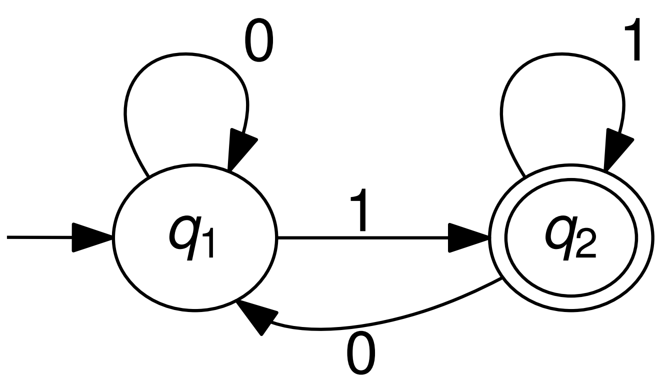
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



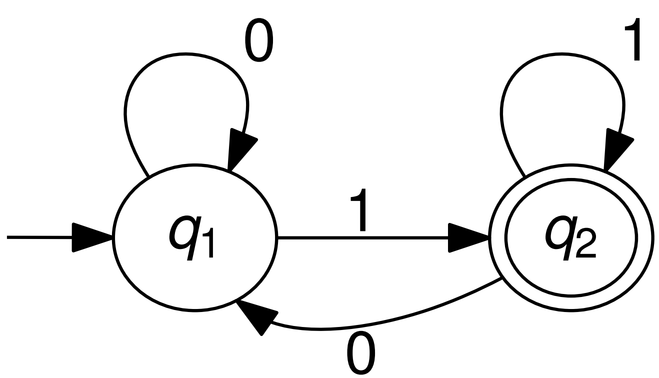
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

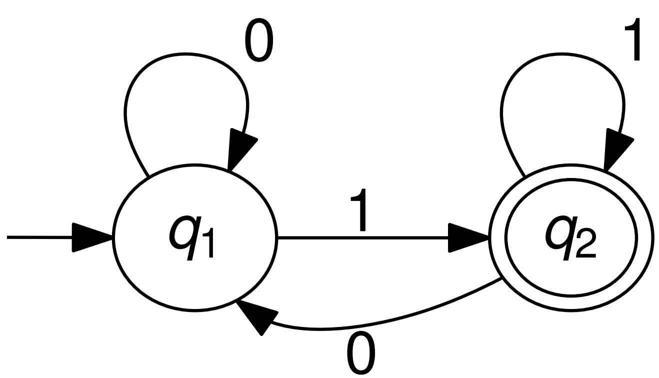


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) \\
&= 1 \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

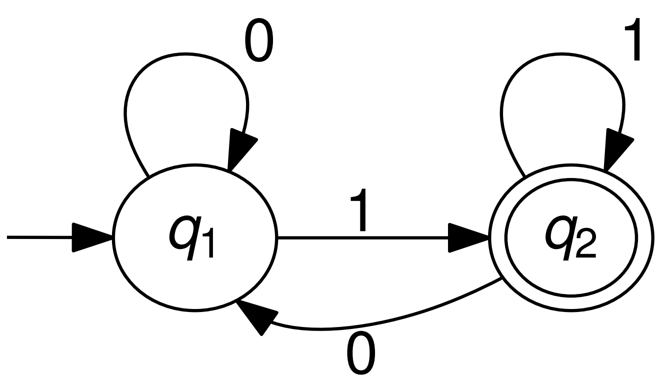


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) \\
&= 1 \cup (0^{\star} 1) = 0^{\star} 1
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t}\right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

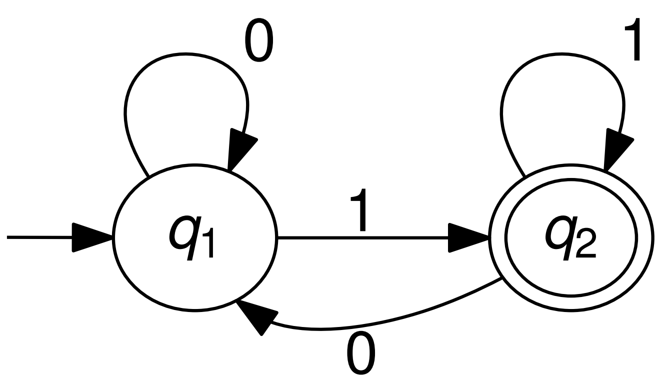


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= (\varepsilon \cup 1) \cup (0(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



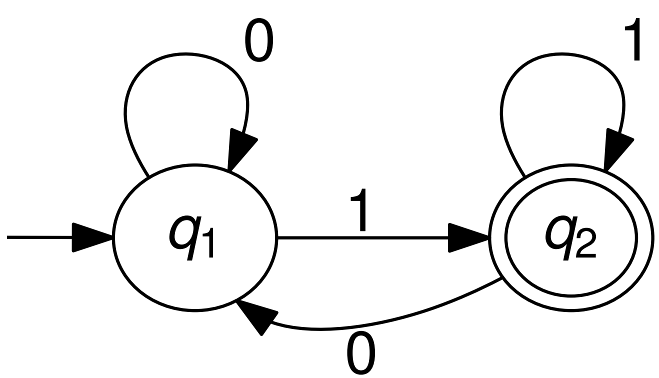
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= (\varepsilon \cup 1) \cup (0 (\varepsilon \cup 0)^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

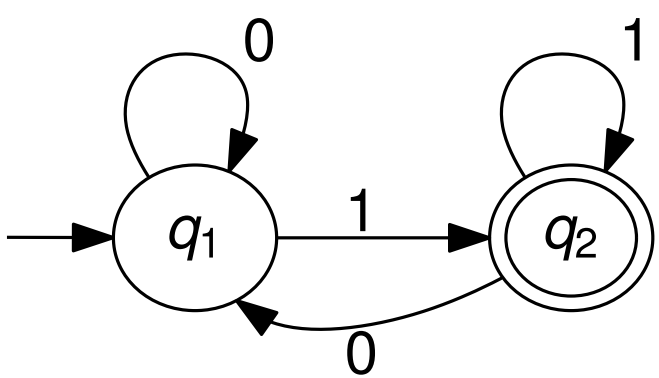
Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= (\varepsilon \cup 1) \cup (0 (\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) \\
&= (\varepsilon \cup 1) \cup (0^{+} 1) \\
&= \varepsilon \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



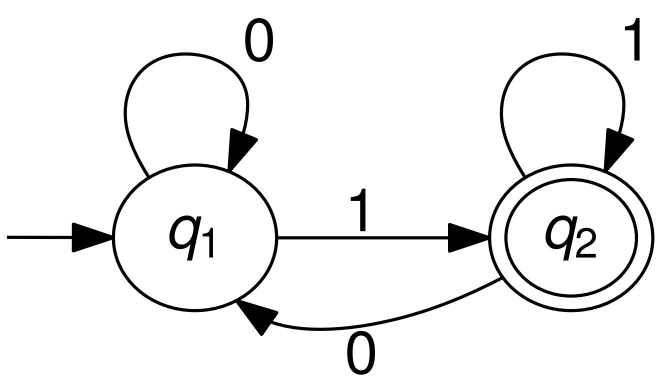
$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^{\star} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= \varepsilon \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$L_{1,2,2} = (0^{\star}1) \cup ((0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{\star}(\varepsilon \cup (0^{\star}1)))$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

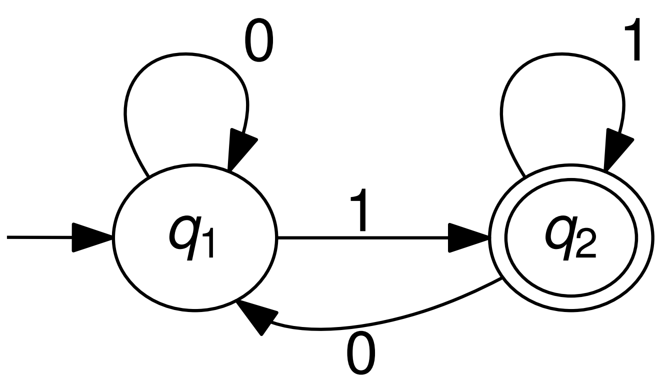


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= \boxed{L_{1,1,2}} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= \varepsilon \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= (0^{\star}1) \cup ((0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{\star}(\varepsilon \cup (0^{\star}1))) \\
&= (0^{\star}1) \cup (0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{+}
\end{aligned}
$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

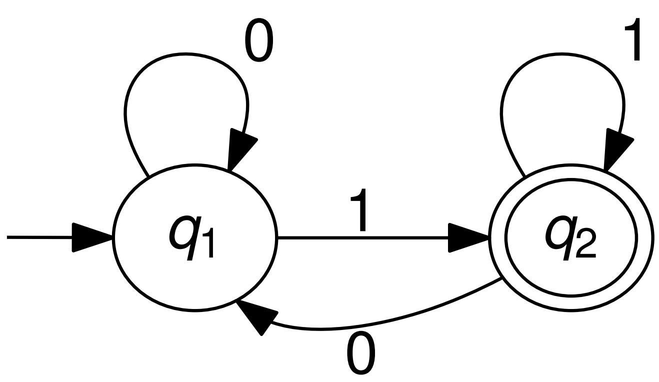


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= \varepsilon \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= (0^{\star}1) \cup (0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{+} \\
&= (0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{\star}
\end{aligned}
$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.

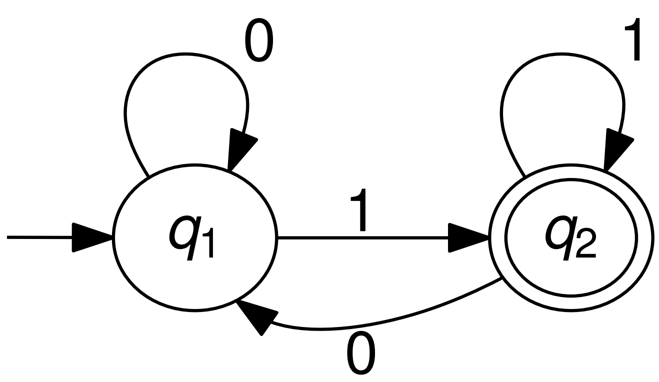


$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= \varepsilon \cup (0^{\star} 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= (0^{\star}1)(\varepsilon \cup (0^{\star}1))^{\star} \\
&= (0^{\star}1)(0^{\star}1)^{\star} = (0^{\star}1)^{+}
\end{aligned}
$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz von Kleene) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache.



$$
\begin{aligned}
L_{1,2,2} &= L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L^{\star}_{2,1,2} L_{2,1,2}) \\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L^{\star}_{1,0,1} L_{1,0,2}) \\
L_{1,0,1} &= \varepsilon \cup 0 \\
L_{1,0,2} &= 1 \\
L_{2,0,2} &= \varepsilon \cup 1 \\
L_{2,0,1} &= 0 \\
L_{1,1,2} &= 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^{\star} 1) = 0^{\star} 1 \\
L_{2,1,2} &= \varepsilon \cup (0^{\star} 1) \\
L_{1,2,2} &= (0^{\star} 1)^{+}
\end{aligned}
$$

$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^{\star} L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

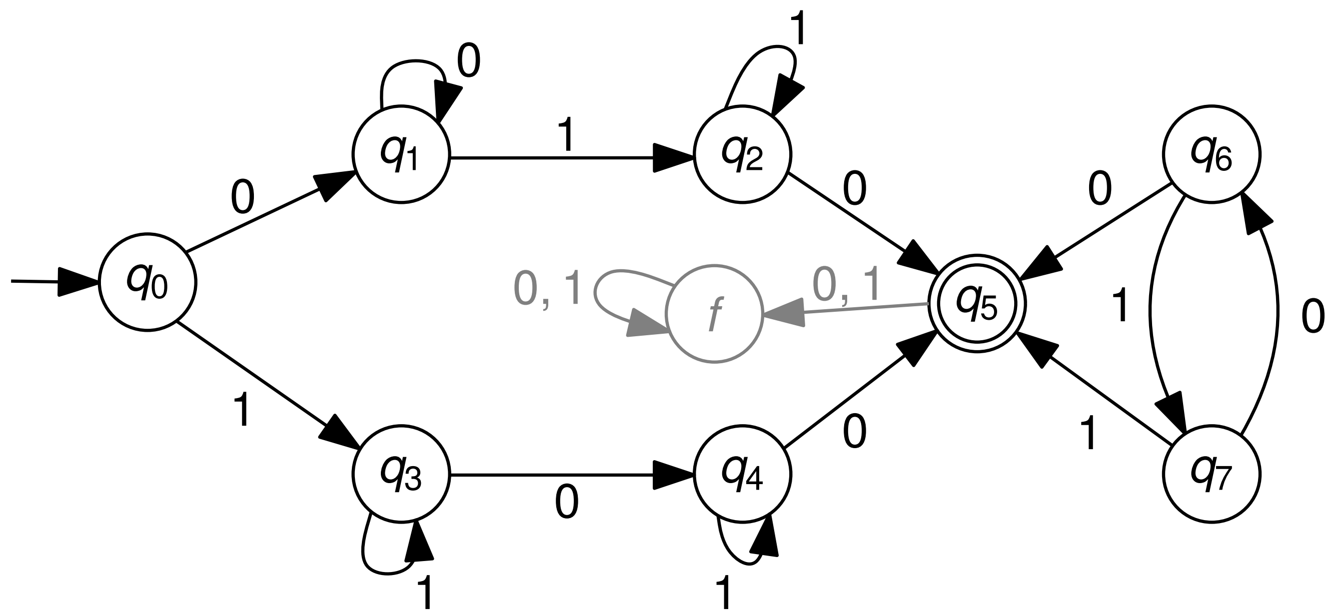
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Entfernen überflüssiger Zustände

Zustände eines endlichen Automaten, die vom Startzustand aus nicht erreichbar sind, sind **überflüssig**.

Verfahren, um nicht erreichbare Zustände zu bestimmen?

Betrachte Zustandsgraph $G = (V, E)$. Wende Tiefen- oder Breitensuche von q_0 aus an. Alle Knoten, die die Suche nicht findet, sind unerreichbar.

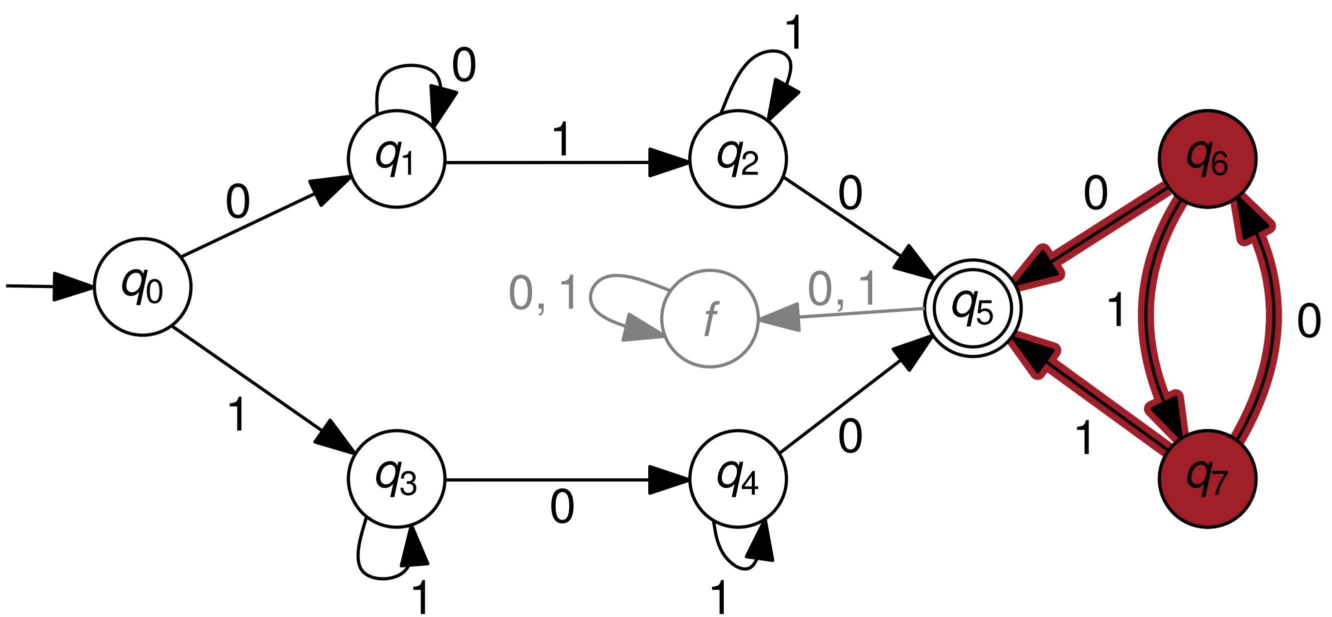


Entfernen überflüssiger Zustände

Zustände eines endlichen Automaten, die vom Startzustand aus nicht erreichbar sind, sind **überflüssig**.

Verfahren, um nicht erreichbare Zustände zu bestimmen?

Betrachte Zustandsgraph $G = (V, E)$. Wende Tiefen- oder Breitensuche von q_0 aus an. Alle Knoten, die die Suche nicht findet, sind unerreichbar.



Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

- Zwei Zustände haben dasselbe Akzeptanzverhalten, wenn es für das Erreichen eines Endzustandes durch Abarbeiten eines Wortes w unerheblich ist, aus welchem der beiden Zustände wir starten.
- Reduktion der Anzahl der Zustände durch Zusammlegen der Zustände mit gleichem Akzeptanzverhalten.

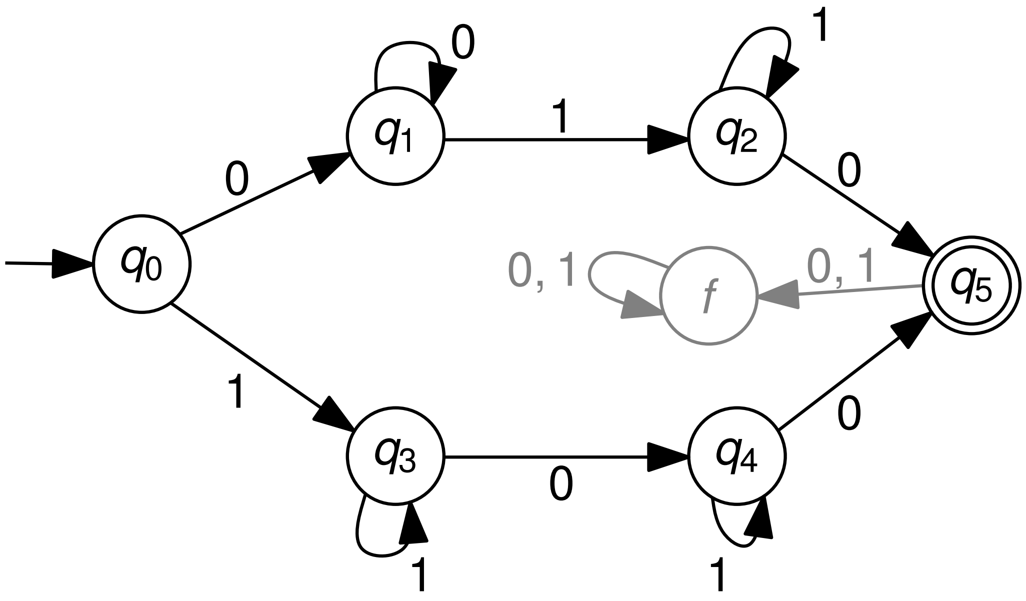
Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Welche Zustände sind äquivalent?



Minimierung von Automaten

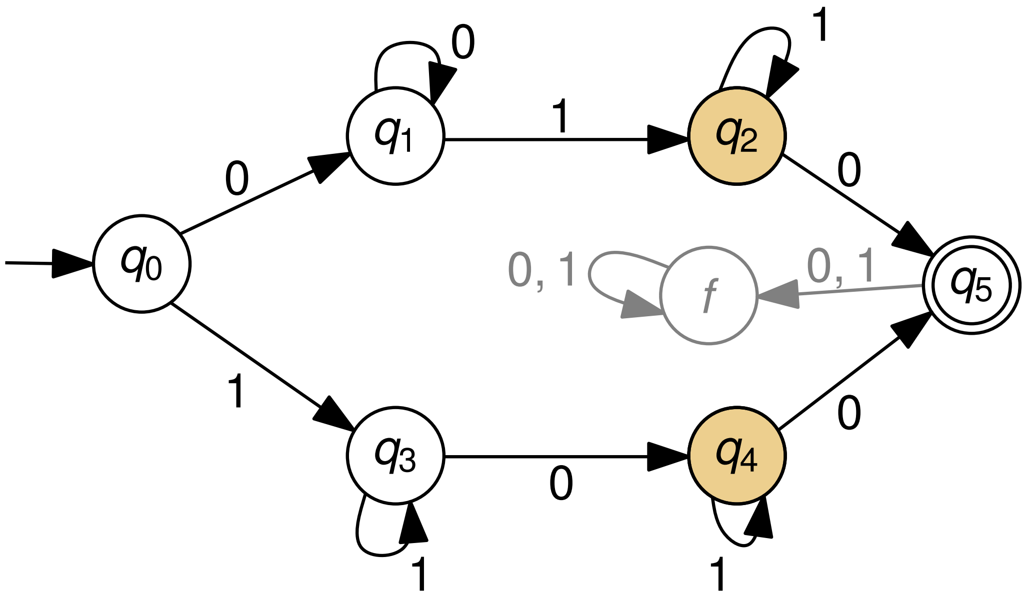
Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Welche Zustände sind äquivalent?

q_2 und q_4?



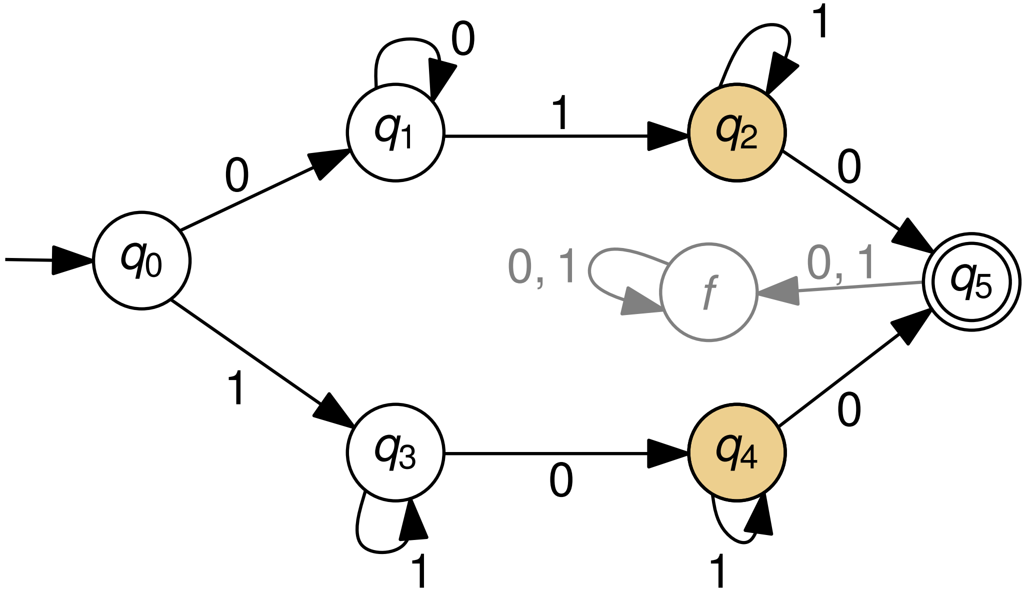
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.



Welche Zustände sind äquivalent?

q_2 und q_4?

Welche Wörter führen zu q_5?

q_2: $1^\star 0$ $\quad$ q_4: $1^\star 0$

$\Rightarrow$ Ja

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

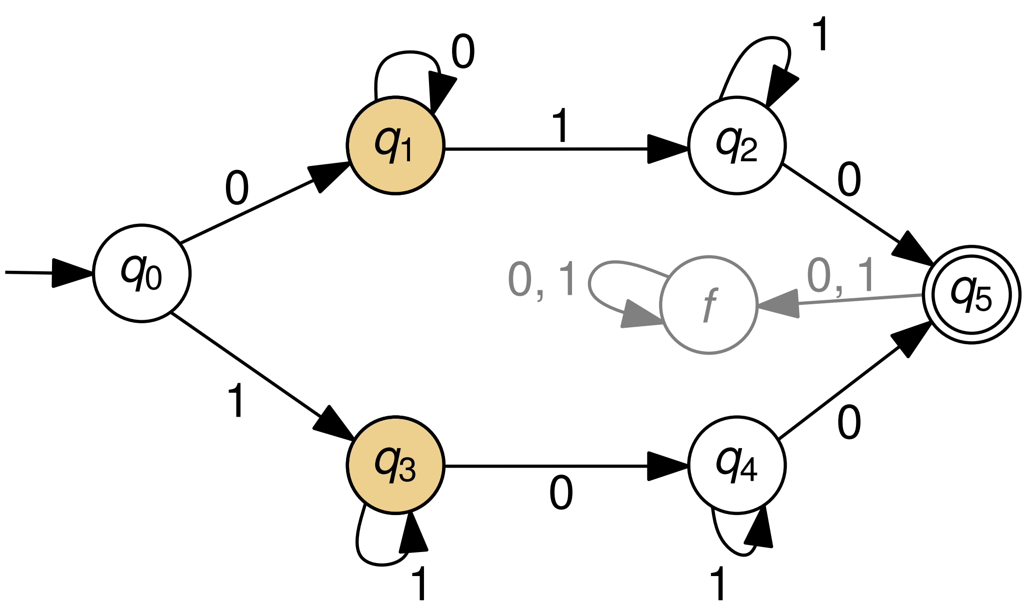
Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Welche Zustände sind äquivalent?

q_1 und q_3?



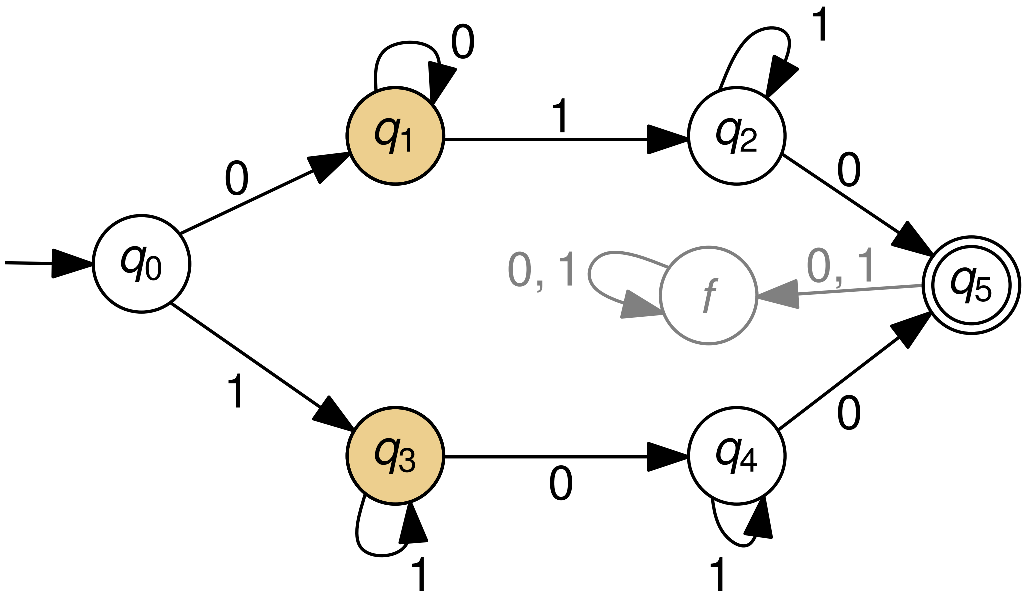
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.



Welche Zustände sind äquivalent?

q_1 und q_3?

$\delta(q_1, 10) = q_5 \in F$

$\delta(q_3, 10) = q_4 \notin F$

$\Rightarrow$ Nein

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

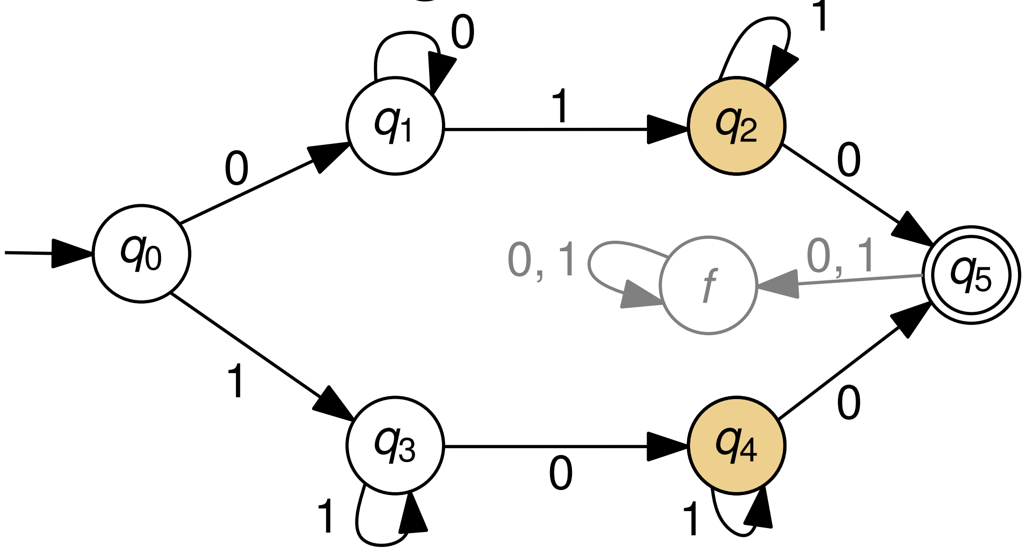
- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

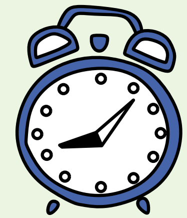
- $\mathcal{A}^{\equiv}$ akzeptiert dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}^{\equiv}$ ist minimal, falls $\mathcal{A}$ keine überflüssigen Zustände hat.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten



Wie sieht der Äquivalenzklassenautomat aus?



2 min Zeit

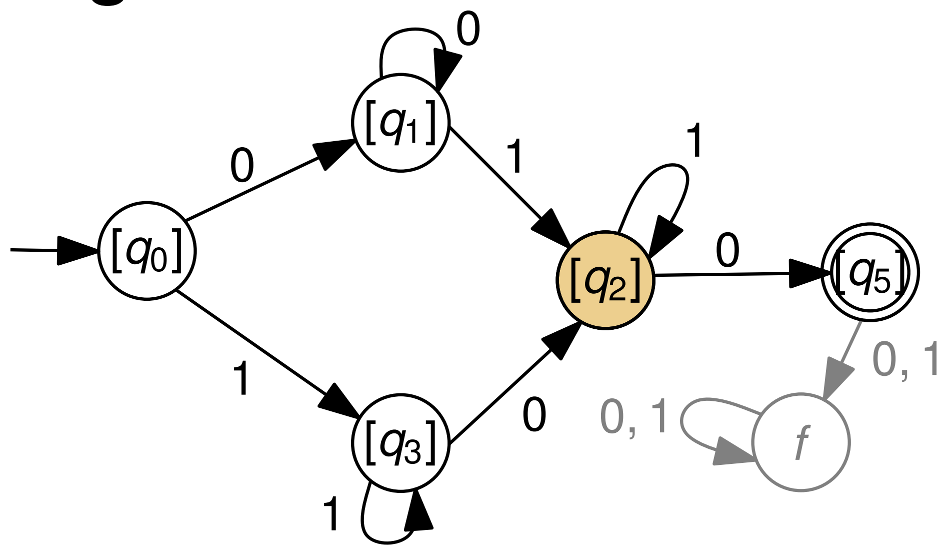
Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

- $\mathcal{A}^{\equiv}$ akzeptiert dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}^{\equiv}$ ist minimal, falls $\mathcal{A}$ keine überflüssigen Zustände hat.

Minimierung von Automaten



Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

- $\mathcal{A}^{\equiv}$ akzeptiert dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}^{\equiv}$ ist minimal, falls $\mathcal{A}$ keine überflüssigen Zustände hat.

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

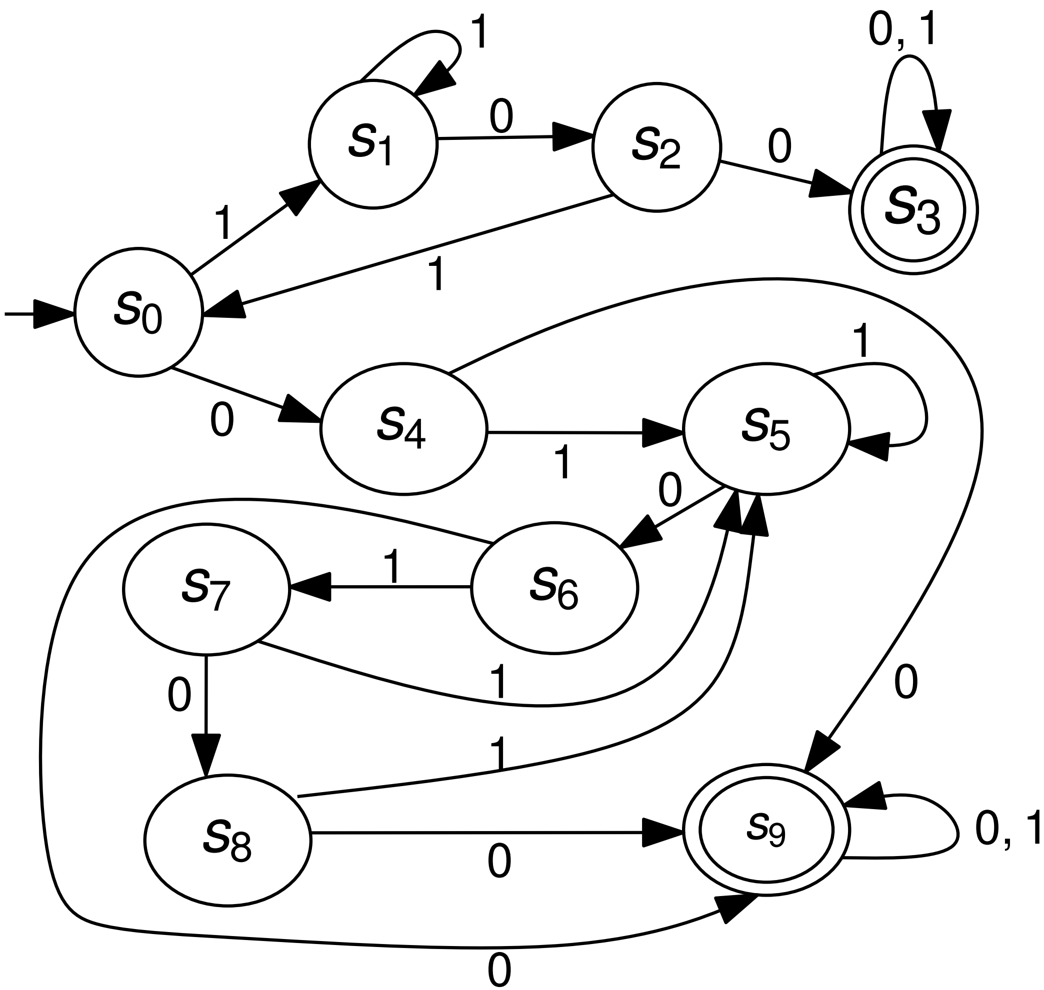
Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

Verfahren:
Finde systematisch **Zeugen** w für Zustände p und q, die nicht äquivalent sind:

$\delta(p, w) \in F$ aber $\delta(q, w) \notin F$ oder $\delta(p, w) \notin F$ aber $\delta(q, w) \in F$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik



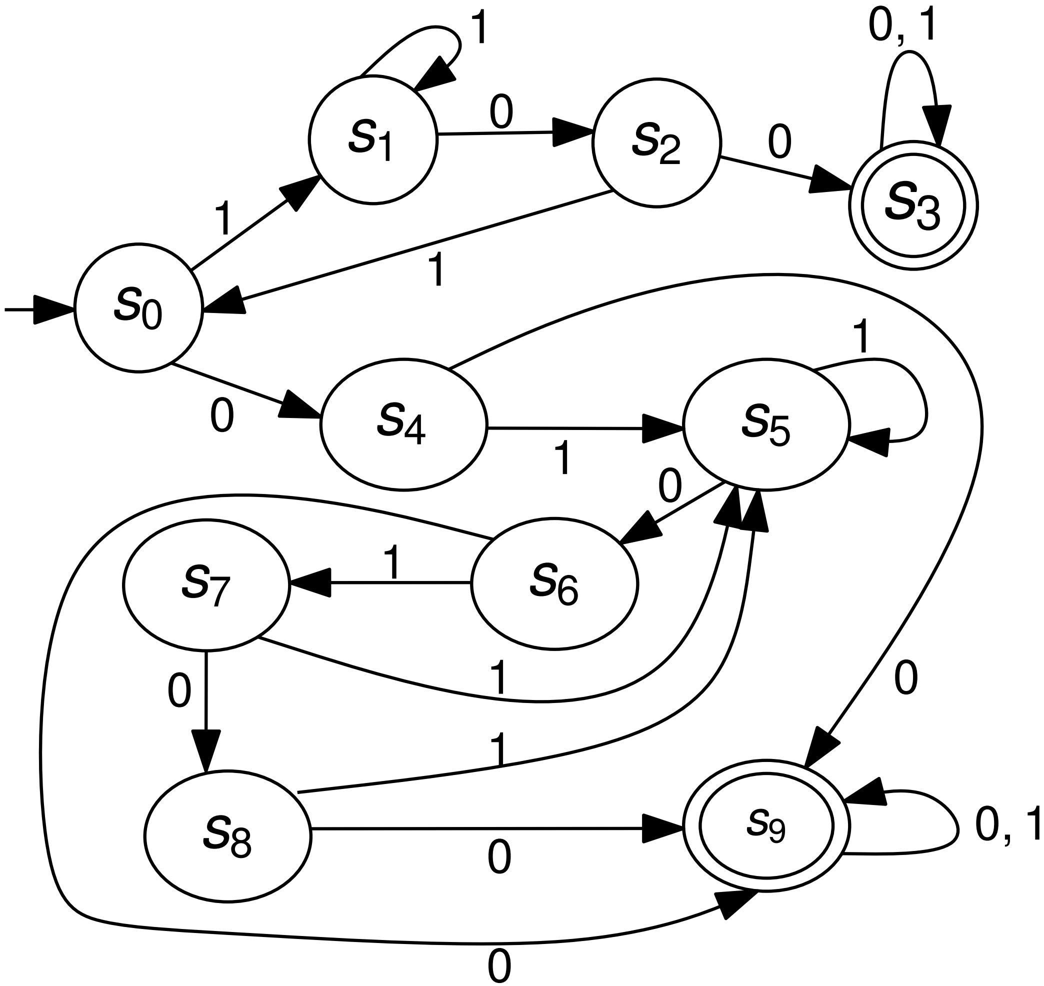
$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$

Betrachte Wort w =

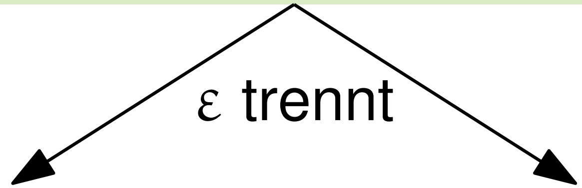
$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik



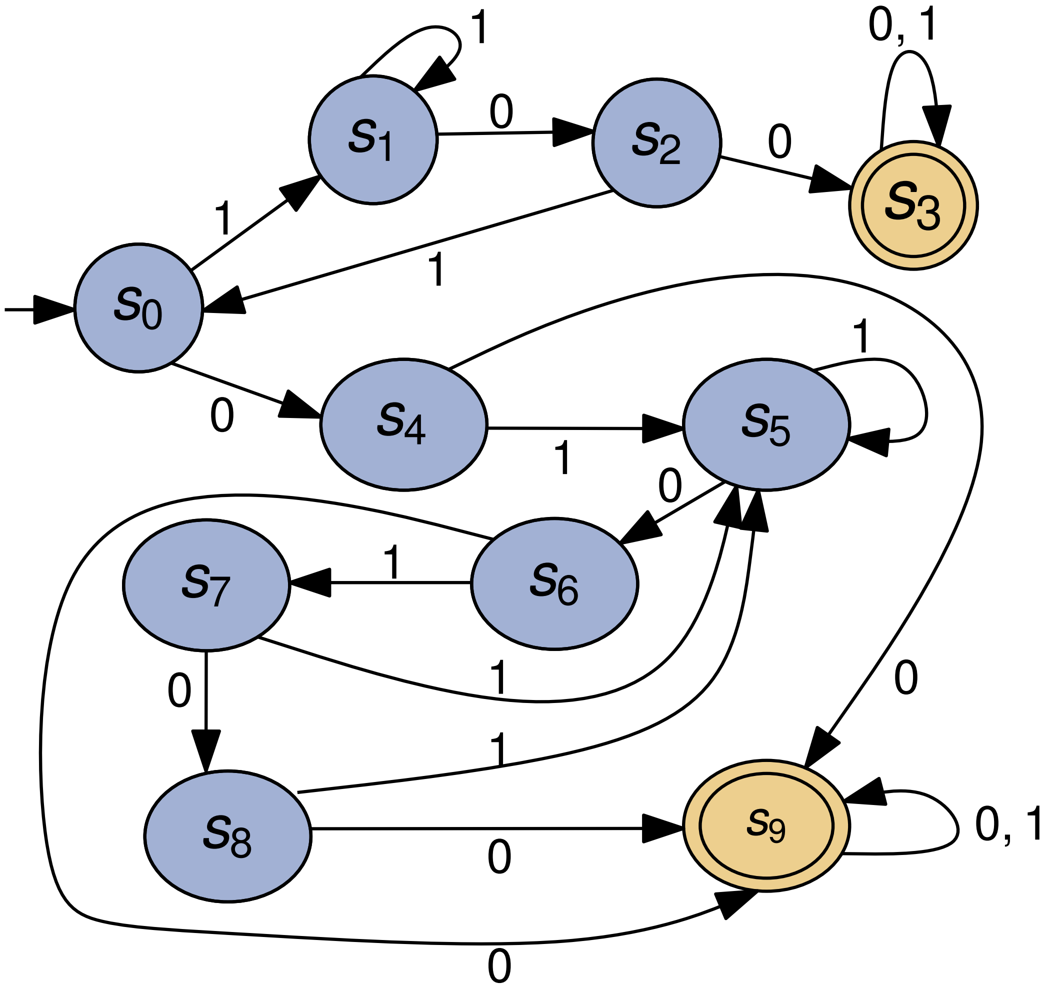
$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$

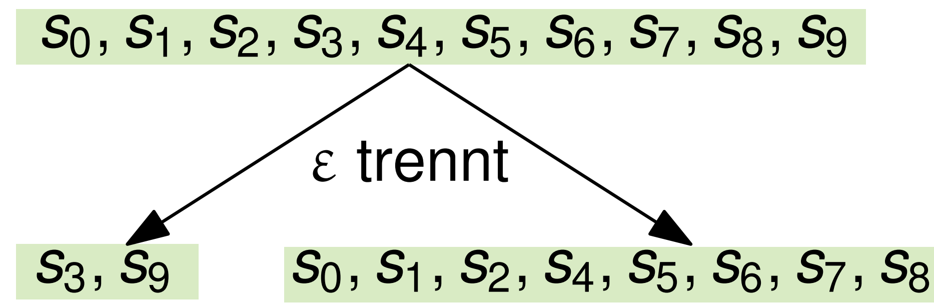


Betrachte Wort $w = \varepsilon$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

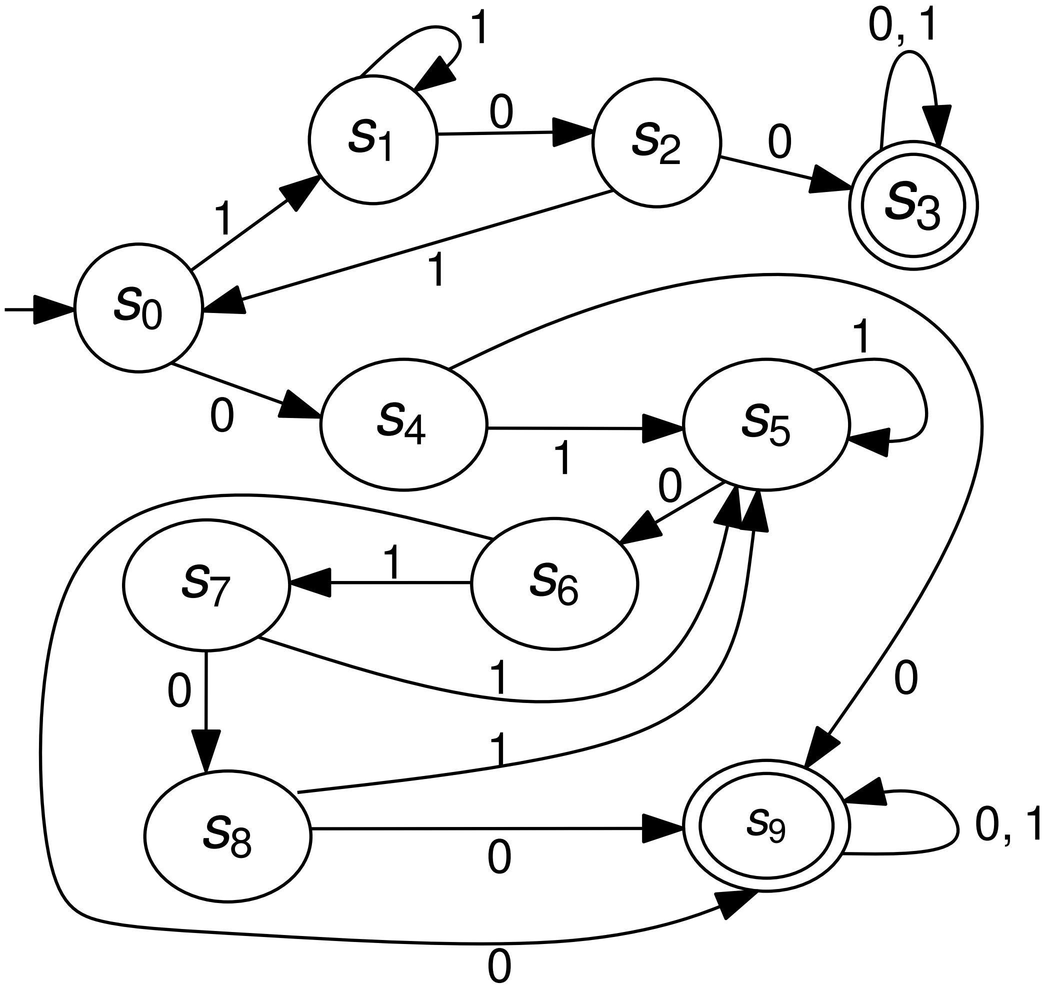


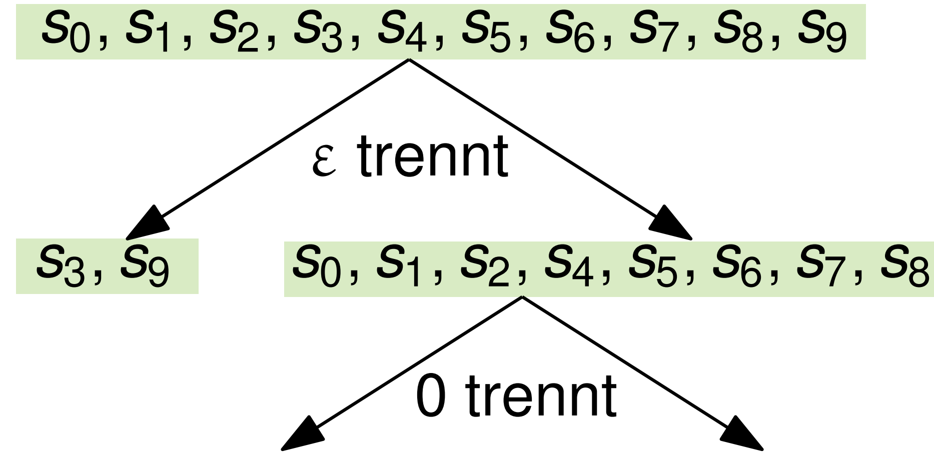


Betrachte Wort $w = \varepsilon$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



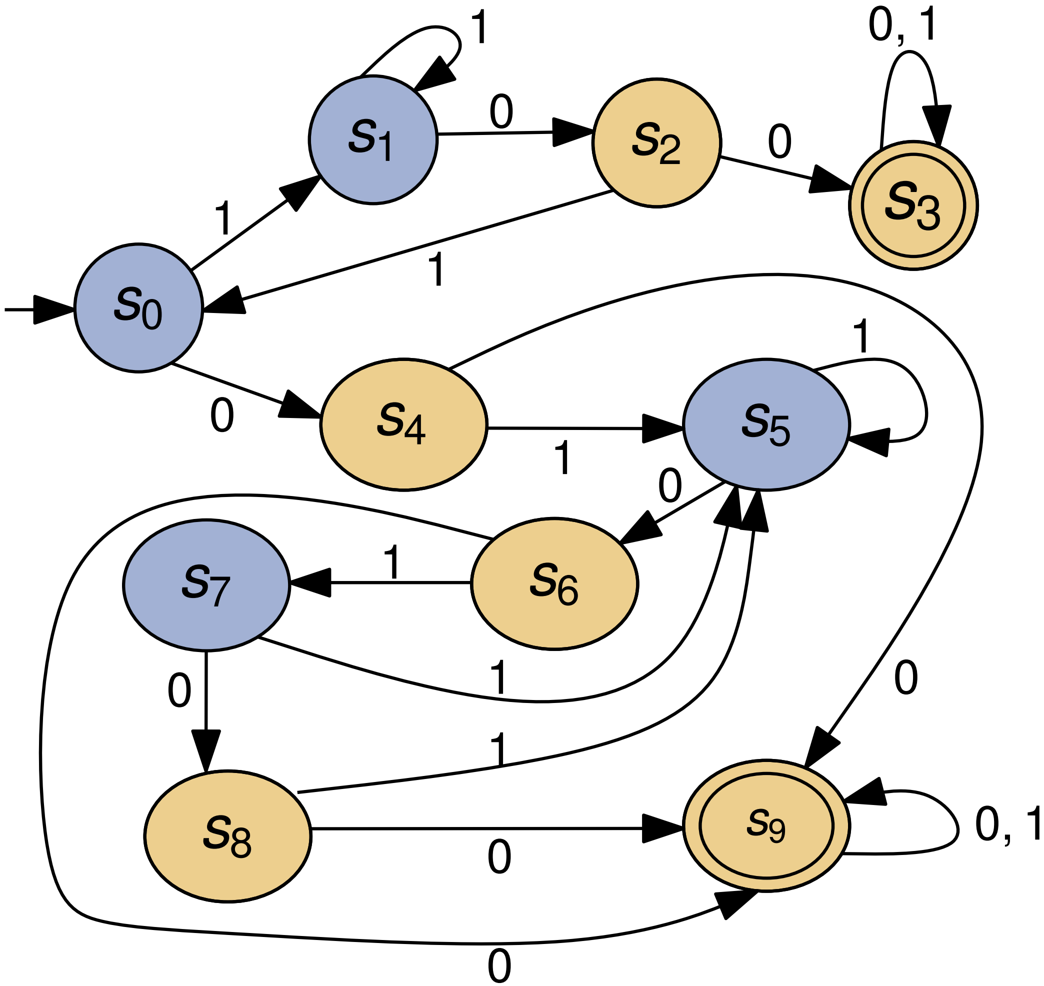


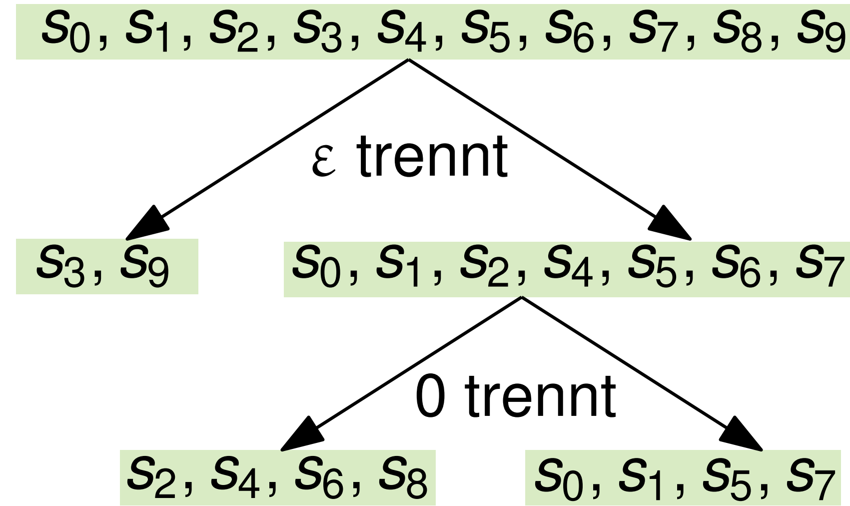
Betrachte Wort $w = 0$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

Karlsruher Institut für Technologie

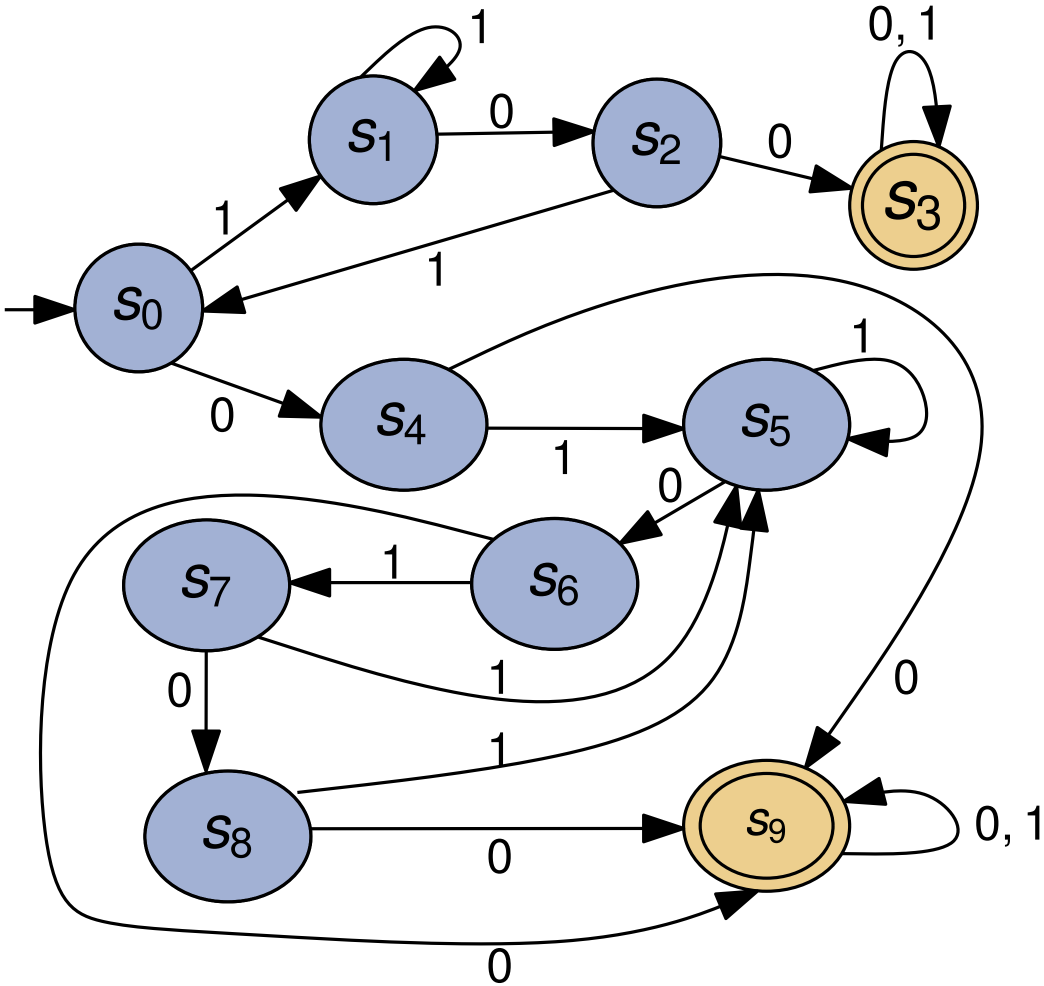




Betrachte Wort $w = 0$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$

ε trennt

s_3, s_9 | $s_0, s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$

0 trennt

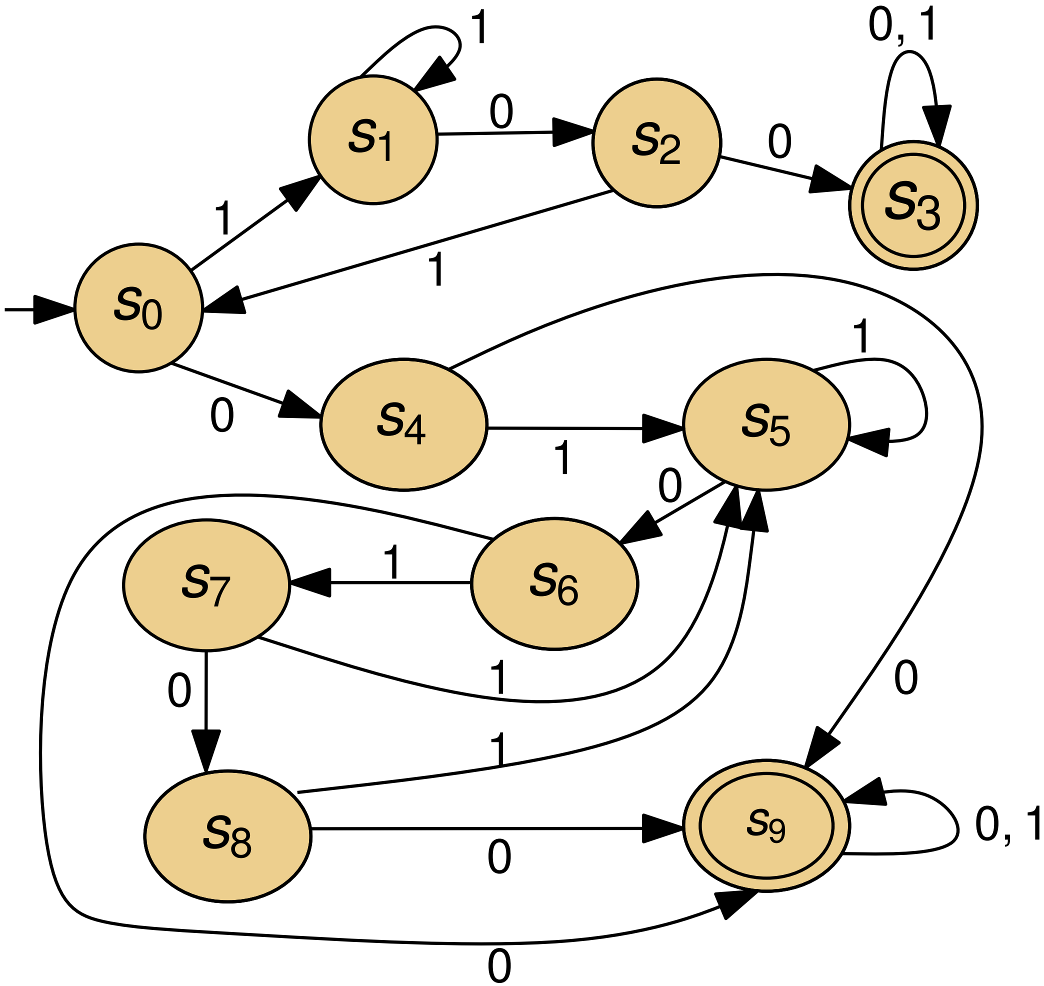
s_2, s_4, s_6, s_8 | s_0, s_1, s_5, s_7

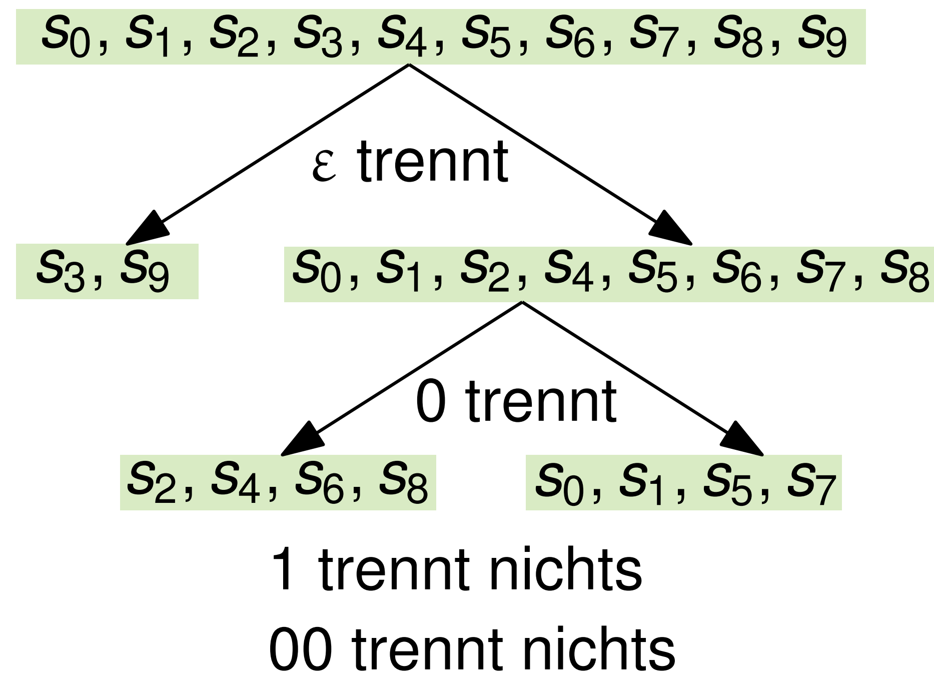
1 trennt nichts

Betrachte Wort $w = 1$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

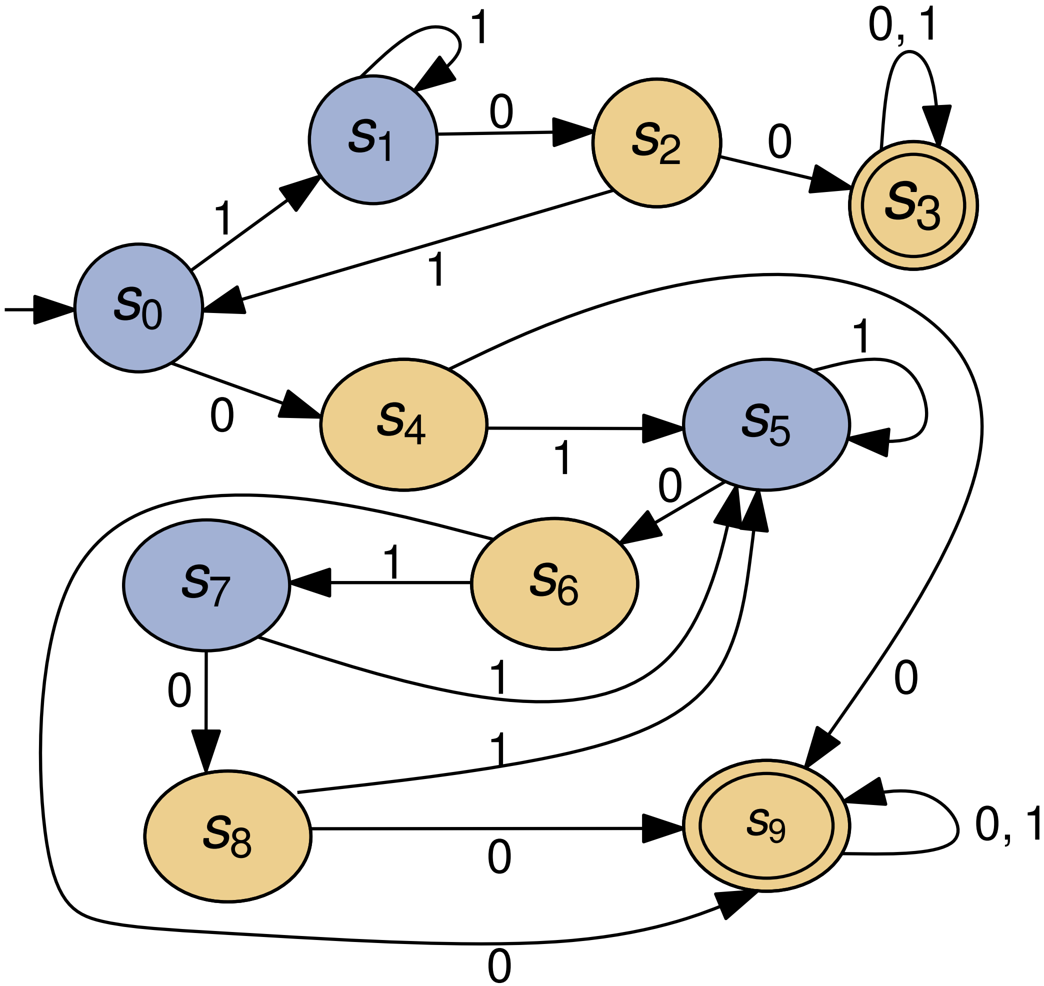


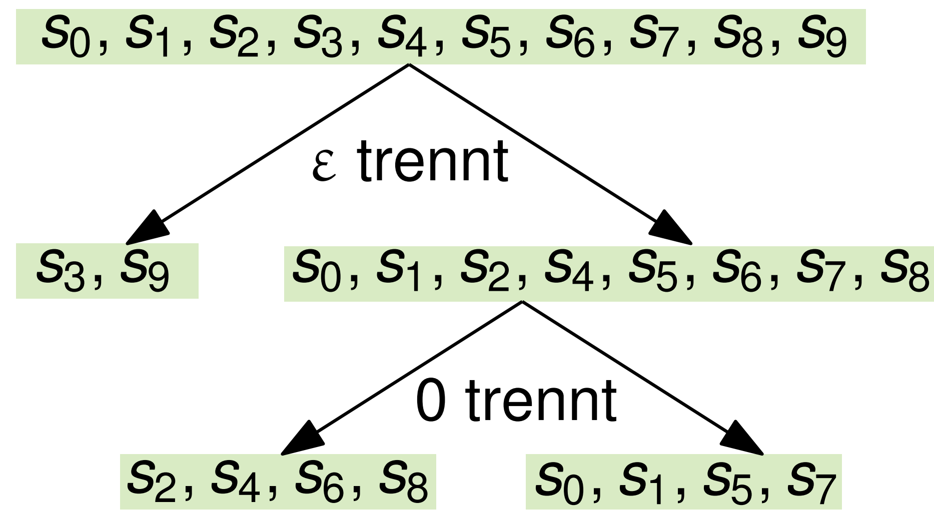


Betrachte Wort $w =$ 00

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.





1 trennt nichts

00 trennt nichts

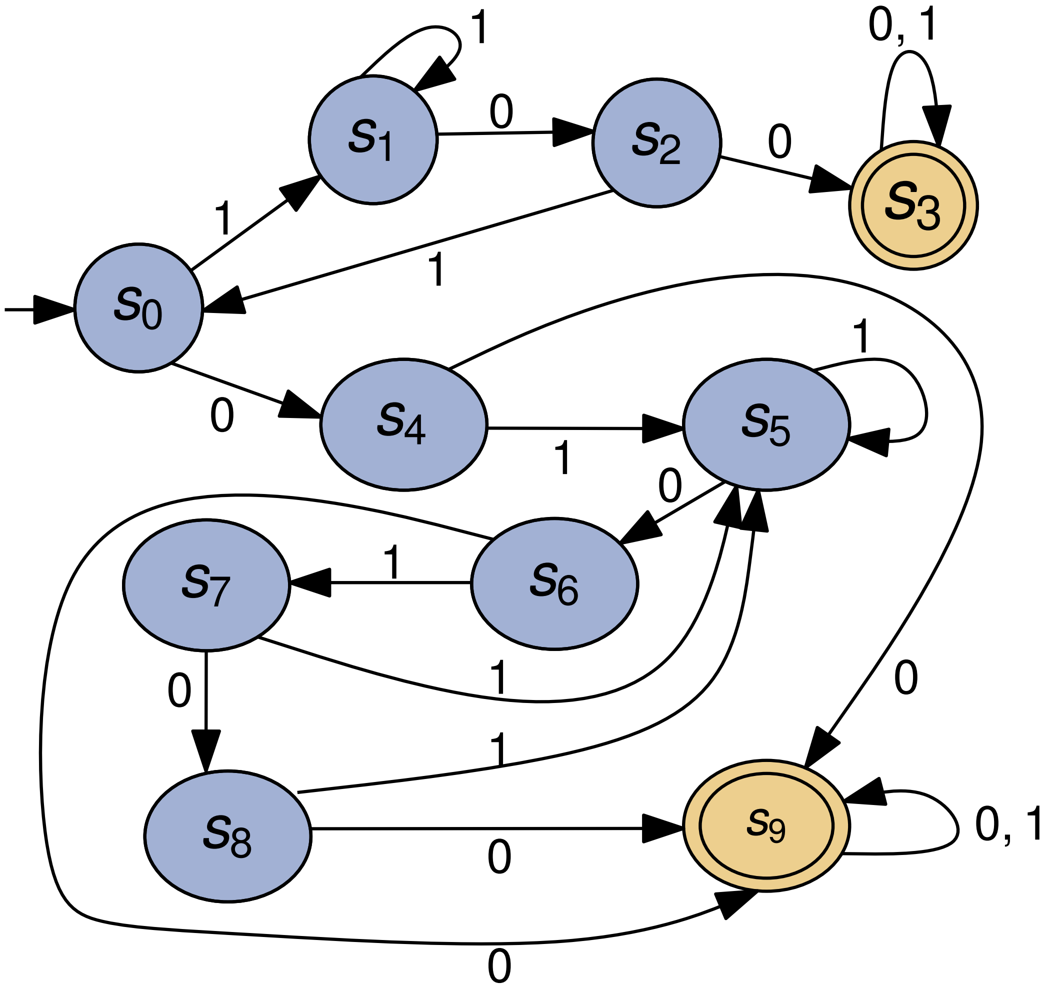
01 trennt nichts

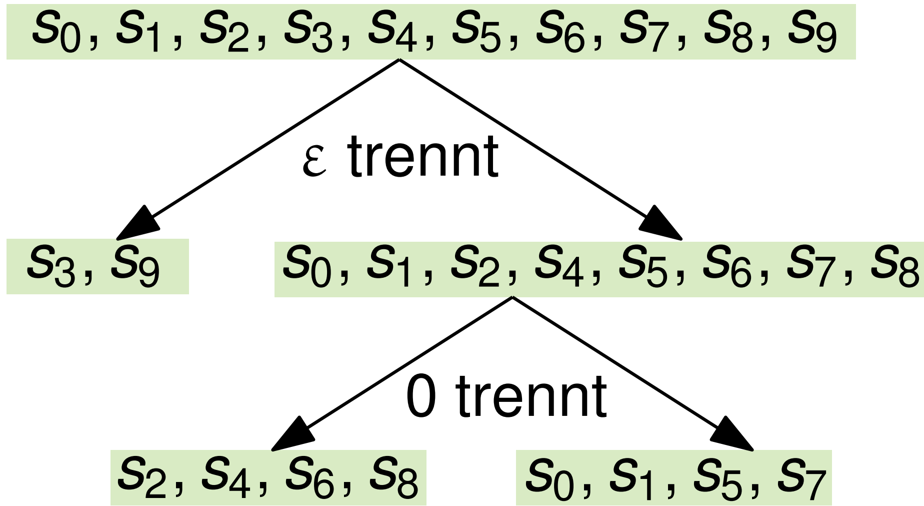
Betrachte Wort $w = 01$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik





1 trennt nichts

00 trennt nichts

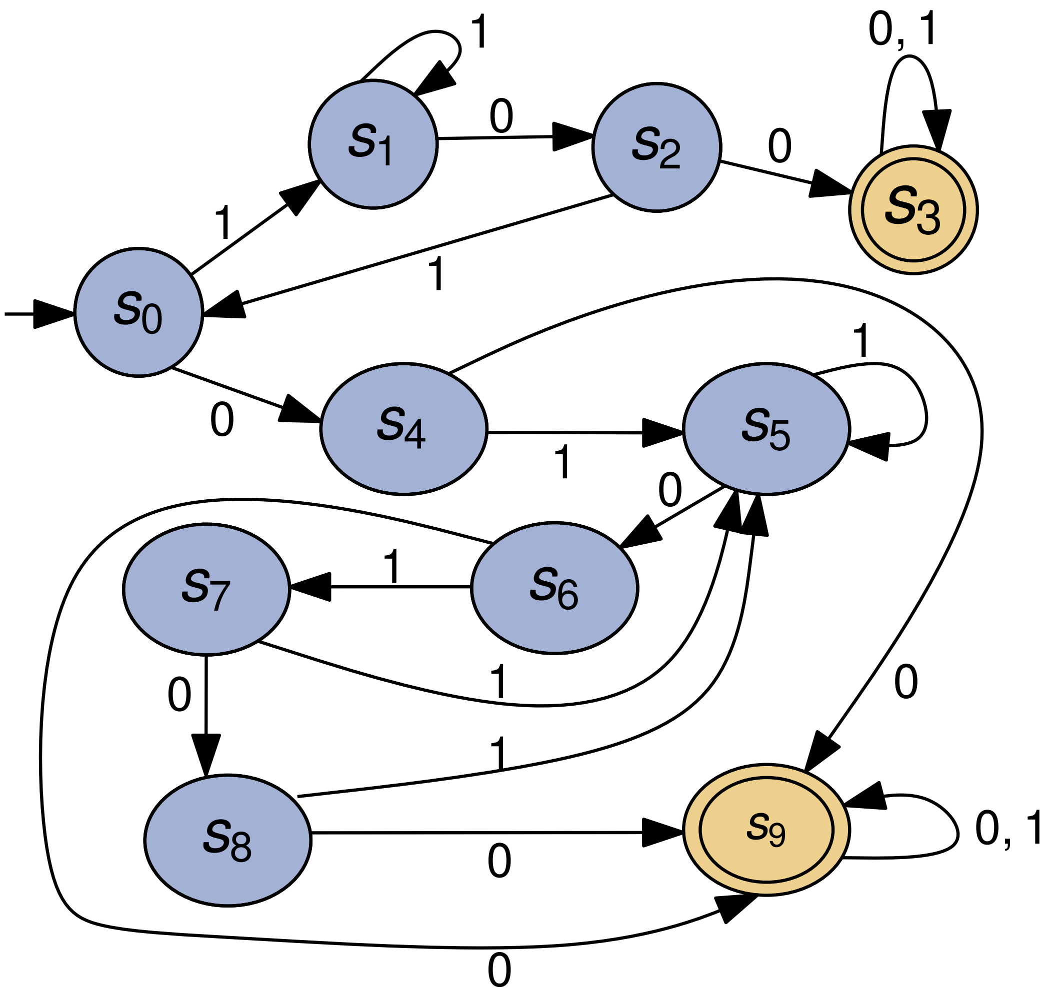
01 trennt nichts

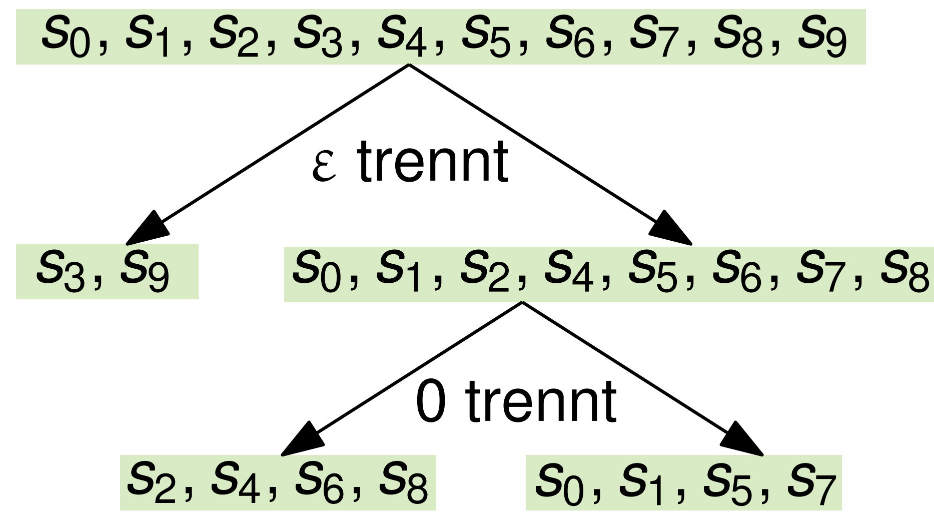
10 trennt nichts

Betrachte Wort $w =$ 10

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.





1 trennt nichts

00 trennt nichts

01 trennt nichts

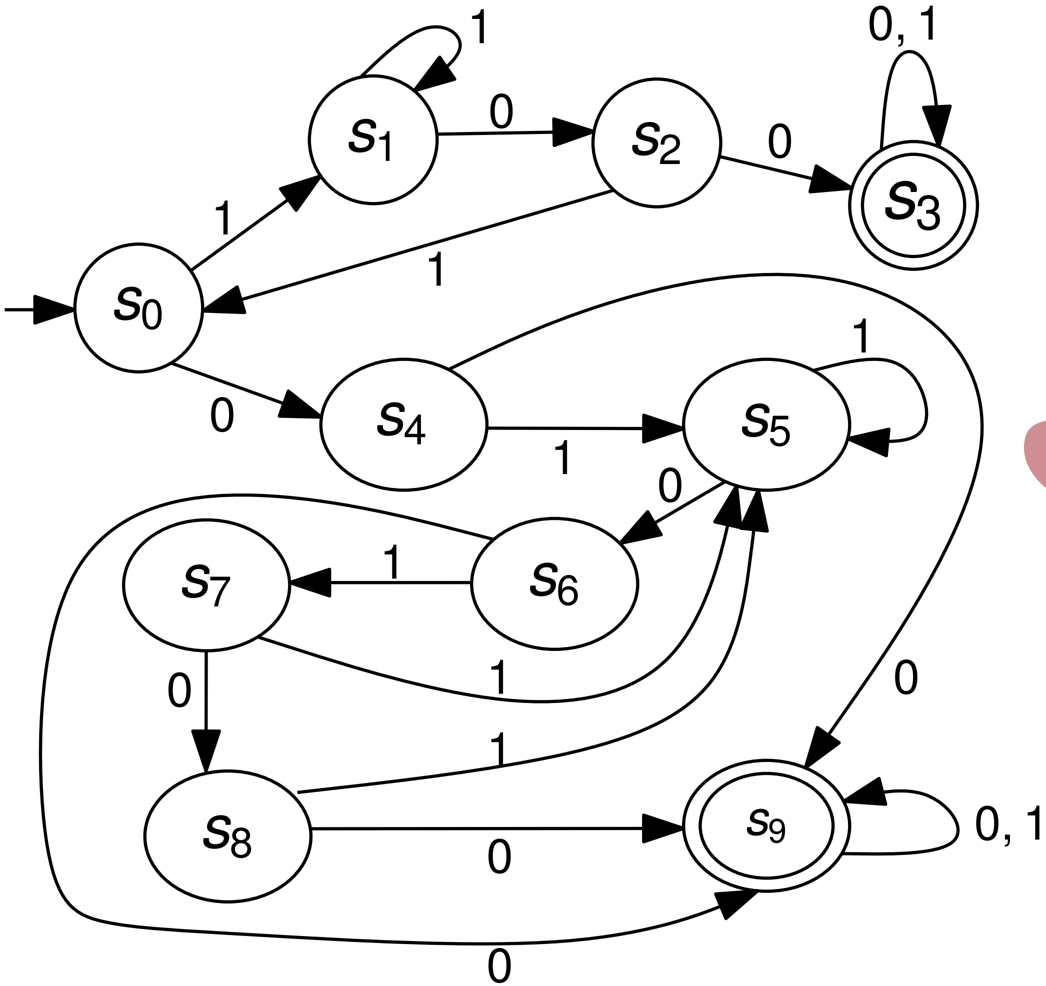
10 trennt nichts

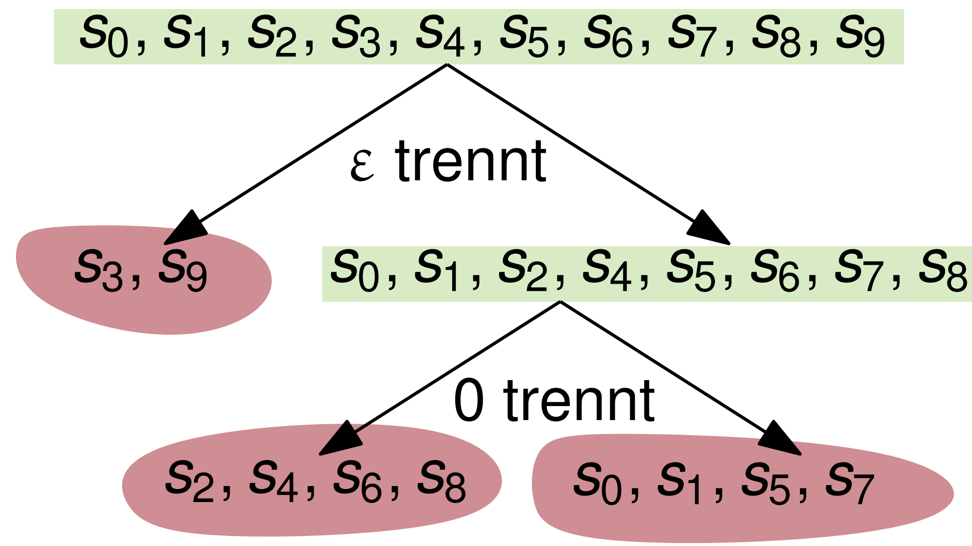
11 trennt nichts

Betrachte Wort $w = 11$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



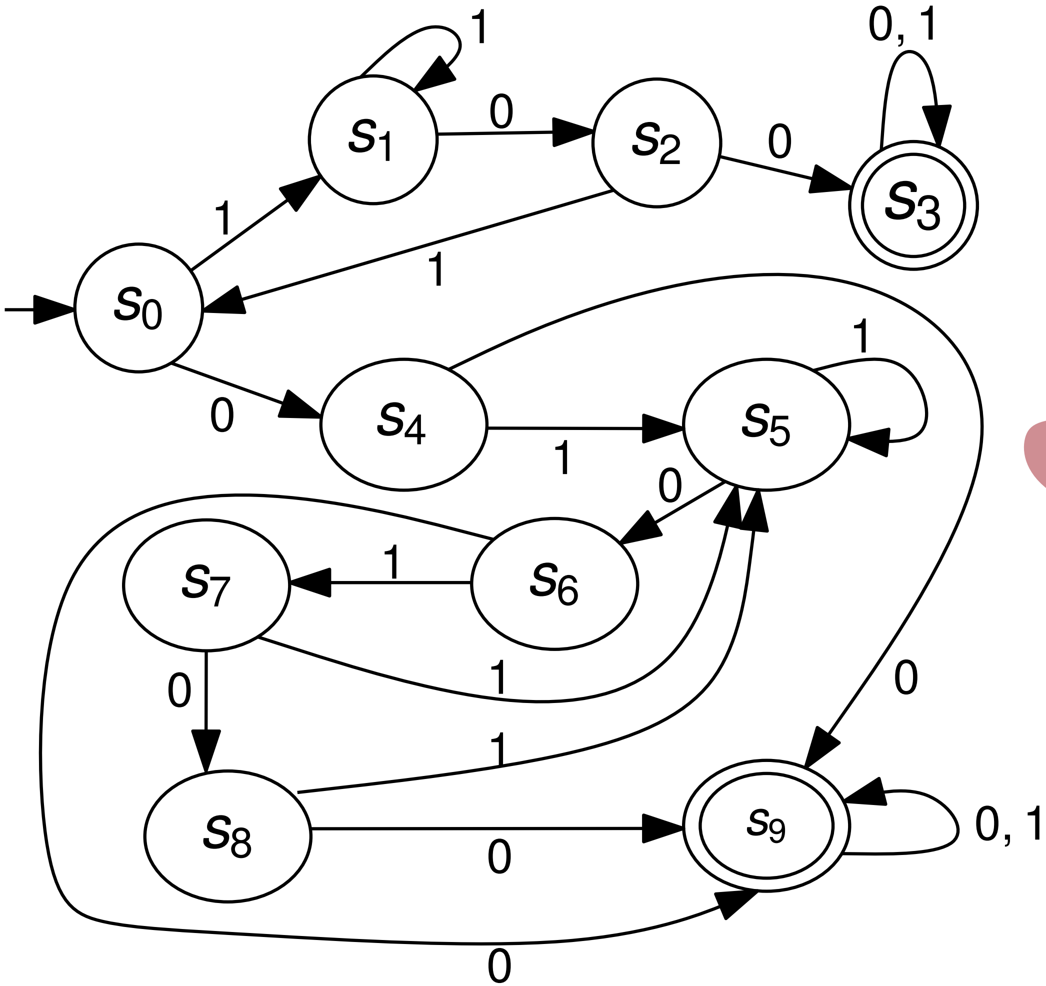


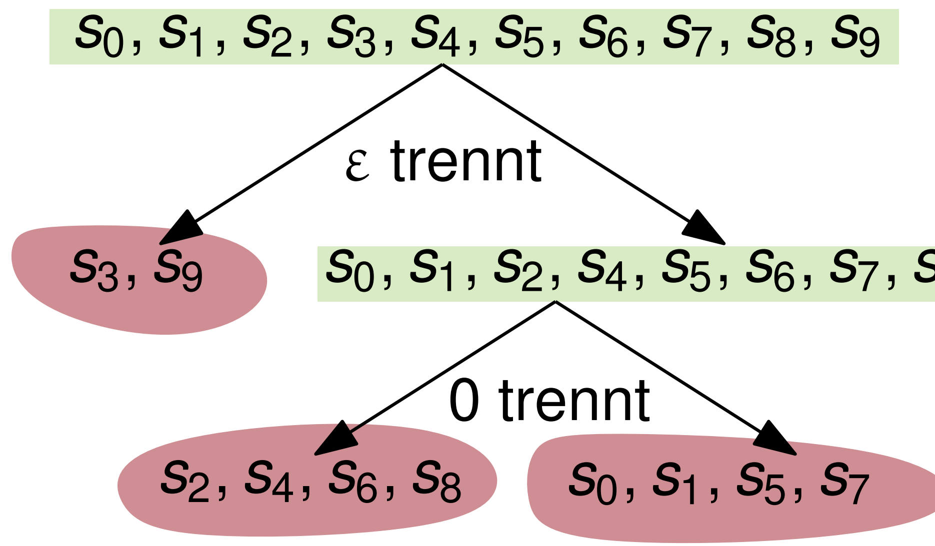
3 Äquivalenzklassen!

Betrachte Wort $w =$ 11

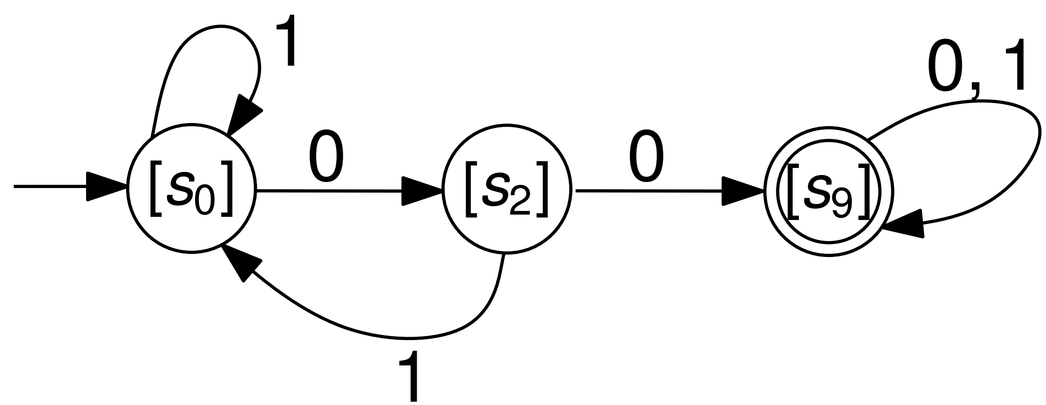
$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.





3 Äquivalenzklassen!

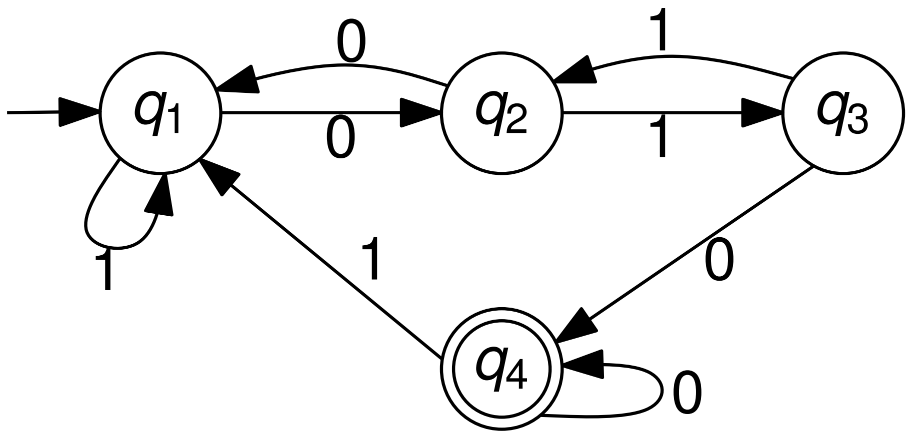


Betrachte Wort $w = 11$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

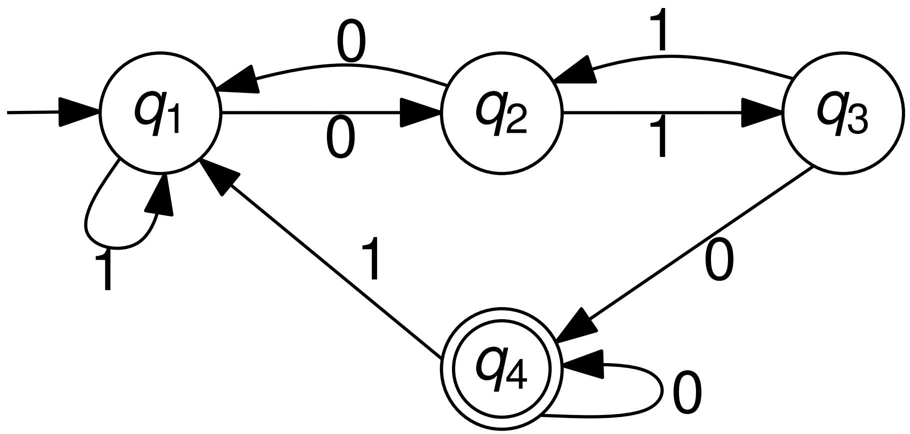
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

Minimierung von Automaten



Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

Minimierung von Automaten



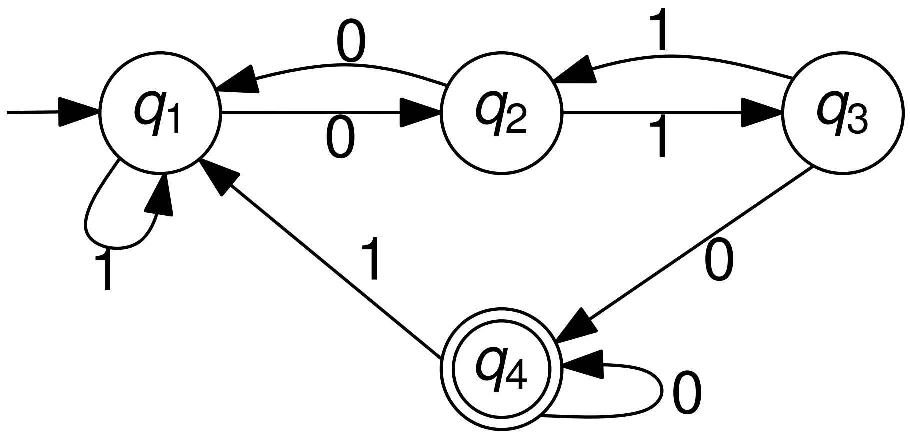
Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

q_1, q_2, q_3, q_4

Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,...

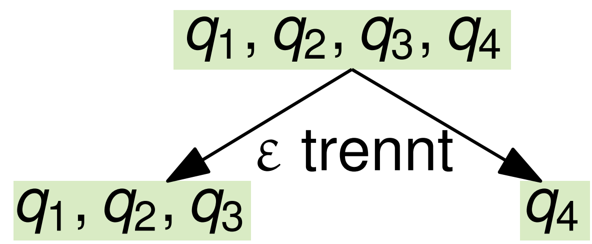
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten

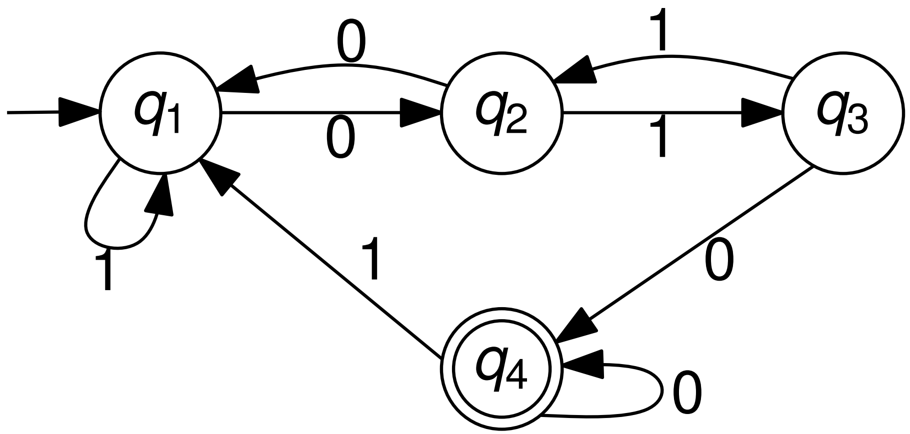


Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,. . .

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

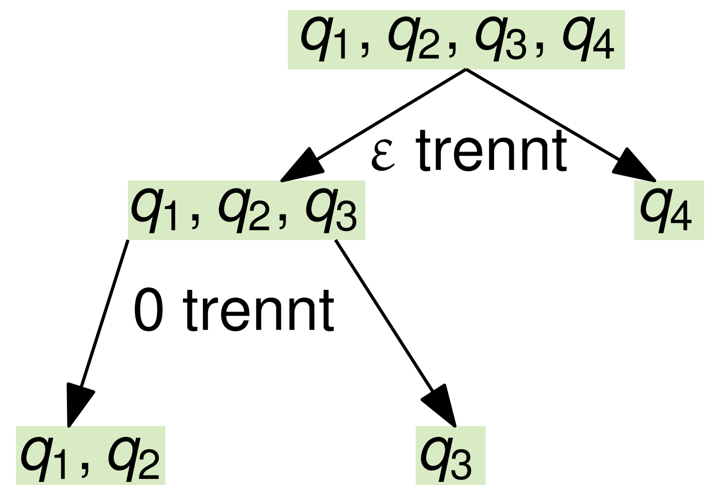


Minimierung von Automaten

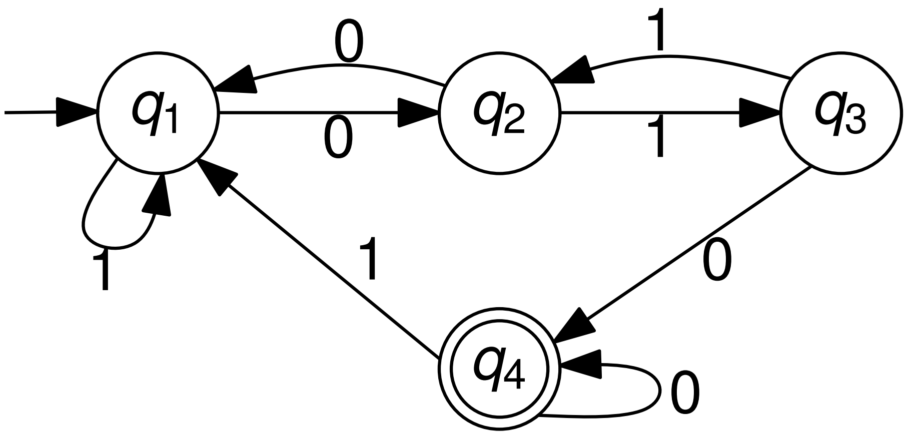


Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,. . .

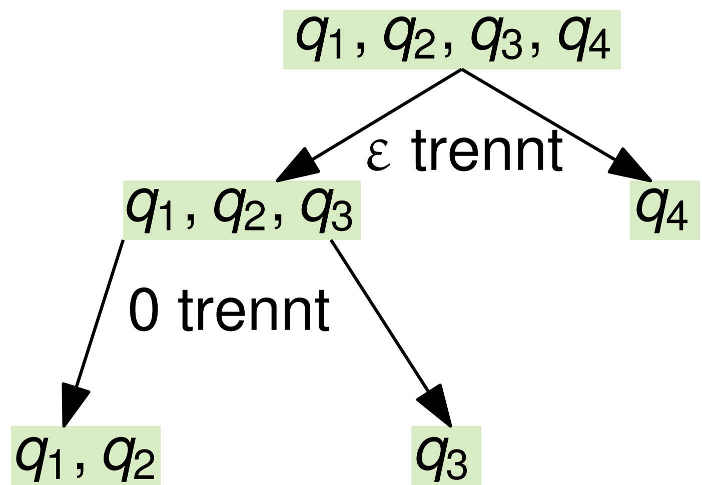
Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



Minimierung von Automaten



Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

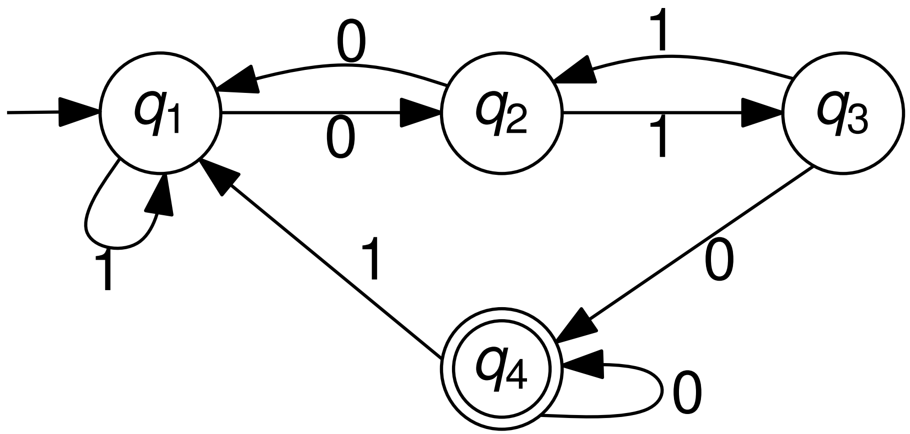


Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,...

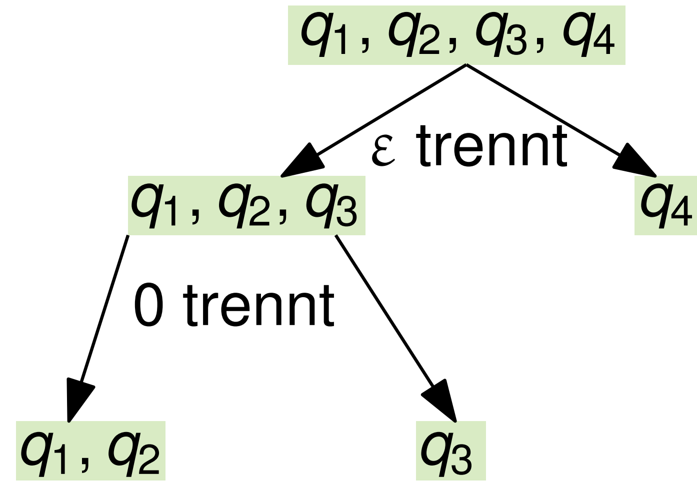
1 trennt nichts

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minimierung von Automaten



Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



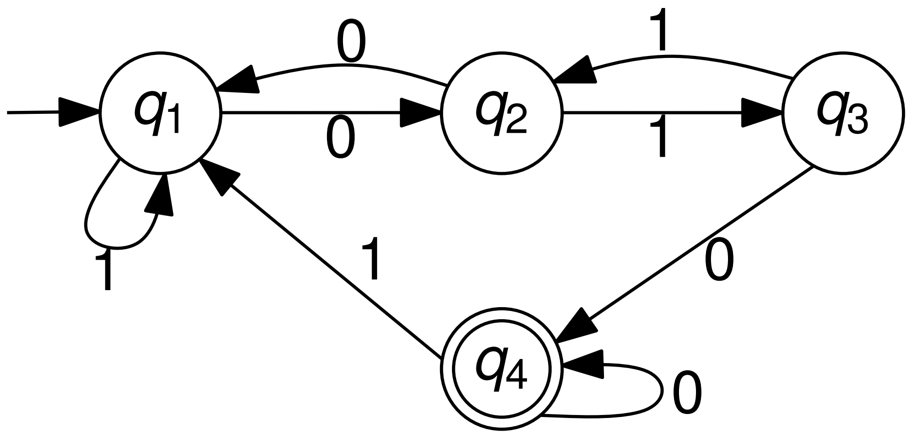
Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,...

1 trennt nichts

01 trennt nichts

Minimierung von Automaten

Karlsruher Institut für Technologie

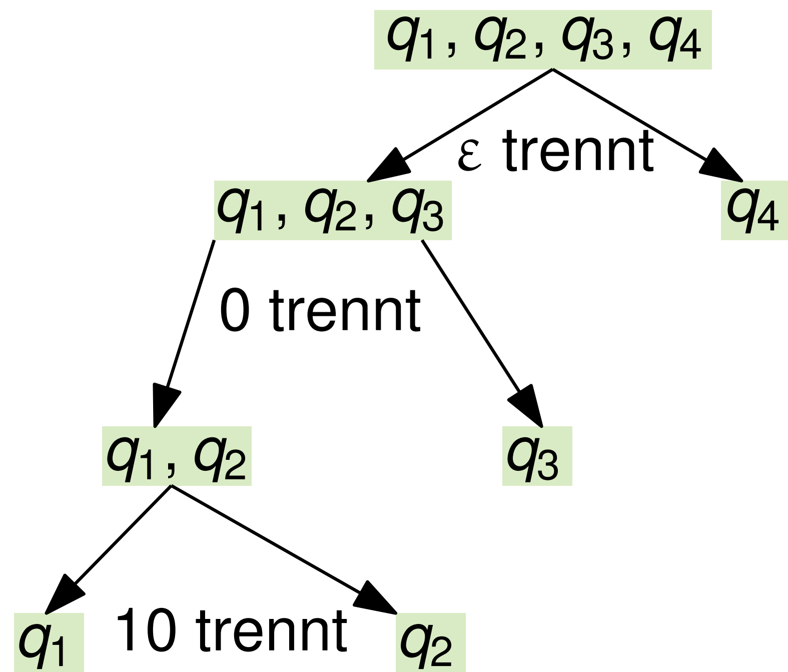


Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

Betrachte: ε, 0, 1, 01, 10, 11,. . .

1 trennt nichts

01 trennt nichts



4 Äquivalenzklassen!

Nerode-Relation

Nerode-Relation R_L einer Sprache L:

Für $x, y \in \Sigma^\star$ gilt:

$$x \; R_L \; y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Beispiel: $\Sigma = \{a, b\}$, $L = (aba)^\star$

- $a \; R_L \; aba$?
- $\varepsilon \; R_L \; aba$?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nerode-Relation

Nerode-Relation R_L einer Sprache L:

Für $x, y \in \Sigma^\star$ gilt:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Beispiel: $\Sigma = \{a, b\}$, $L = (aba)^\star$

- $a \, R_L \, aba$? Nein, denn: $a\,ba \in L$, aber $aba\,ba \notin L$
- $\varepsilon \, R_L \, aba$?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nerode-Relation

Nerode-Relation R_L einer Sprache L:

Für $x, y \in \Sigma^\star$ gilt:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Beispiel: $\Sigma = \{a, b\}$, $L = (aba)^\star$

- $a \, R_L \, aba$? Nein, denn: $a\,ba \in L$, aber $aba\,ba \notin L$
- $\varepsilon \, R_L \, aba$? Ja, denn für jedes $z \in \Sigma^\star$: $\varepsilon\, z \in L \Leftrightarrow aba\, z \in L$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nerode-Relation

Karlsruher Institut für Technologie

Nerode-Relation R_L einer Sprache L:

Für $x, y \in \Sigma^\star$ gilt:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Nerode-Relation ist Äquivalenzrelation mit Äquivalenzklassen

$$[x] = \{y \in \Sigma^\star \mid x \, R_L \, y\}.$$

Index $\mathrm{ind}(R_L)$ ist Anzahl der Äquivalenzklassen.

Satz von Nerode

$$L \text{ regulär} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ind}(R_L) < \infty$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x\, R_L\, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x\, R_L\, y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

Sprache der alternierenden Bitfolgen:
$0101010 \in L$, $101010 \in L$, $0100101 \notin L$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L \\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

Karlsruher Institut für Technologie

$$x \; R_L \; y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x \; R_L \; y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= L \\ S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\ S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\ S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\ S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\ S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \{\varepsilon, \dots\} = \\ [0] &= \{0, 10, \dots\} = \\ [1] &= \{1, 01, \dots\} = \\ [00] &= \{00, 11, \dots\} = \end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \left\{ z \in \Sigma^\star \mid xz \in L \right\}$$

Dann:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \left\{0, 1\right\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L \\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \left\{\varepsilon, \dots\right\} = \left\{\varepsilon\right\} \\
[0] &= \left\{0, 10, \dots\right\} = \\
[1] &= \left\{1, 01, \dots\right\} = \\
[00] &= \left\{00, 11, \dots\right\} =
\end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x\,R_L\,y \iff (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x\,R_L\,y \iff S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L \\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{\varepsilon, \ldots\} = \{\varepsilon\} \\
[0] &= \{0, 10, \ldots\} = 0(10)^\star \cup (10)^+ \\
[1] &= \{1, 01, \ldots\} = \\
[00] &= \{00, 11, \ldots\} =
\end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x\, R_L\, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x\, R_L\, y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L \\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{\varepsilon, \ldots\} = \{\varepsilon\} \\
[0] &= \{0, 10, \ldots\} = 0(10)^\star \cup (10)^+ \\
[1] &= \{1, 01, \ldots\} = 1(01)^\star \cup (01)^+ \\
[00] &= \{00, 11, \ldots\} =
\end{aligned}
$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Alternative Sichtweise

$$x\, R_L\, y \quad\Longleftrightarrow\quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x\, R_L\, y \quad\Longleftrightarrow\quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L\\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)\\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon)\\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset\\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon)\\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{\varepsilon, \dots\} = \{\varepsilon\}\\
[0] &= \{0, 10, \dots\} = 0(10)^\star \cup (10)^+\\
[1] &= \{1, 01, \dots\} = 1(01)^\star \cup (01)^+\\
[00] &= \{00, 11, \dots\} = (0 \cup 1)^\star(00 \cup 11)(0 \cup 1)^\star
\end{aligned}$$

Alternative Sichtweise

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \Sigma^\star : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Definiere für $x \in \Sigma^\star$ Menge der gültigen Suffixe

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$

Dann:

$$x \, R_L \, y \quad \Longleftrightarrow \quad S_x = S_y$$

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon &= L \\
S_0 &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon) \\
S_1 &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{00} &= S_{11} = \emptyset \\
S_{01} &= (01)^\star(0 \cup \varepsilon) \\
S_{10} &= (10)^\star(1 \cup \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{\varepsilon, \dots\} = \{\varepsilon\} \\
[0] &= \{0, 10, \dots\} = 0(10)^\star \cup (10)^+ \\
[1] &= \{1, 01, \dots\} = 1(01)^\star \cup (01)^+ \\
[00] &= \{00, 11, \dots\} = (0 \cup 1)^\star(00 \cup 11)(0 \cup 1)^\star
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 4 Äquivalenzklassen

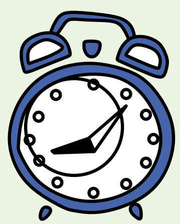
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Automat der Nerode-Relation

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$$
$$[0] = 0(10)^\star \cup (10)^+$$
$$[1] = 1(01)^\star \cup (01)^+$$
$$[00] = (0 \cup 1)^\star(00 \cup 11)(0 \cup 1)^\star$$

$$Q = \{[x] \mid x \in \Sigma^\star\}$$
$$\delta([x], a) = [xa]$$
$$s = [\varepsilon]$$
$$F = \{[w] \mid w \in L\}$$

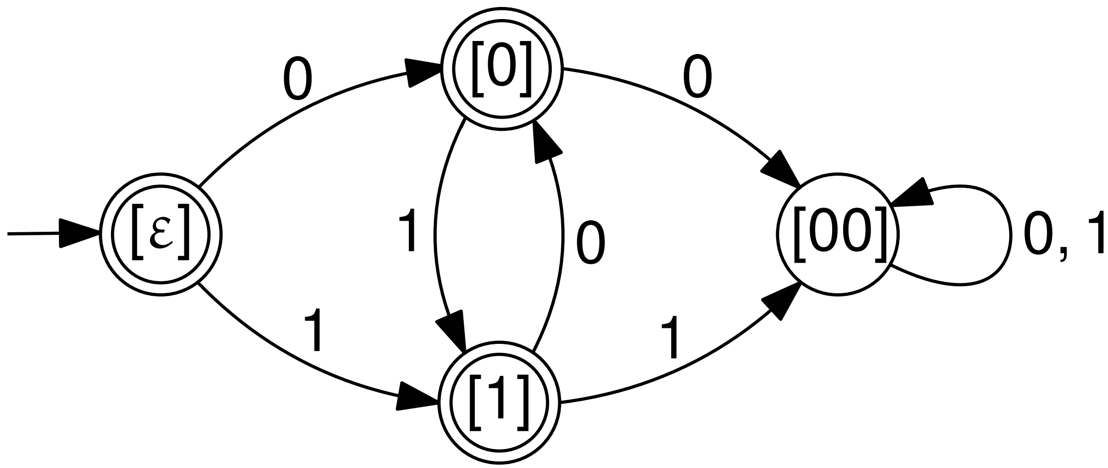

3 min Zeit


Automat der Nerode-Relation

Beispiel: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = (0 \cup \varepsilon) \cdot (10)^\star \cdot (1 \cup \varepsilon)$

$$[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$$
$$[0] = 0(10)^\star \cup (10)^+$$
$$[1] = 1(01)^\star \cup (01)^+$$
$$[00] = (0 \cup 1)^\star(00 \cup 11)(0 \cup 1)^\star$$

$$Q = \{[x] \mid x \in \Sigma^\star\}$$
$$\delta([x], a) = [xa]$$
$$s = [\varepsilon]$$
$$F = \{[w] \mid w \in L\}$$



Nerode-Relation

$$S_x = \{z \in \Sigma^\star \mid xz \in L\}$$
$$x \, R_L \, y \iff S_x = S_y$$

$\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Geben Sie die Äquivalenzklassen von R_L an. Ist L regulär?

Für welche Wörter ist S_x nicht leer? $P = \{a^{i+j} b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$

$\Rightarrow [b] = \Sigma^\star \setminus P$, $S_{[b]} = \emptyset$

$j = 0$:

$x = a^i$ $\quad a^i \, b^i \quad a^i \, a^j b^j b^i \quad S_x = \{a^j b^{i+j} \mid j \in \mathbb{N}_0\}$

$j > 0$:

$x = a^{i+j} b^j$ $\quad a^{i+j} b^j \, b^i \quad S_x = \{b^i\}$

S_x hängt nicht von j ab $\Rightarrow [a^{i+1} b] = \{a^{i+j} b^i \mid j \in \mathbb{N}_0\}$, $[a^i] = \{a^i\}$ $\Big\}$ 2 Klassen für jedes $i \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \operatorname{ind}(R_L) = \infty$, L nicht regulär

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0, 1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0, 1)$ mit $x \notin \text{Bild}(f)$. Widerspr. $\lightning$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0, 1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0, 1)$ mit $x \notin \mathrm{Bild}(f)$. Widerspr.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3

$x = 0,$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0, 1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0, 1)$ mit $x \notin \text{Bild}(f)$. Widerspr.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3

$\longrightarrow x \neq f(1)$

$x = 0,\ 7$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0, 1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0, 1)$ mit $x \notin \mathrm{Bild}(f)$. Widerspr.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7	$\to x \neq f(1)$
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9	$\to x \neq f(2)$
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1	
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7	
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3	

$x = 0{,}\,7\;7$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0,1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0,1)$ mit $x \notin \mathrm{Bild}(f)$. Widerspr. ⚡

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7	$\rightarrow x \neq f(1)$
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9	$\rightarrow x \neq f(2)$
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1	$\rightarrow x \neq f(3)$
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7	
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3	

$x = 0,\ 7\ 7\ 0$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0, 1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0, 1)$ mit $x \notin \text{Bild}(f)$. Widerspr. ⚡

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7	$\longrightarrow x \neq f(1)$
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9	$\longrightarrow x \neq f(2)$
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1	$\longrightarrow x \neq f(3)$
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7	$\longrightarrow x \neq f(4)$
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3	

$x = 0,7700$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0,1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0,1)$ mit $x \notin \mathrm{Bild}(f)$. Widerspr. ↯

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7	$\to x \neq f(1)$
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9	$\to x \neq f(2)$
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1	$\to x \neq f(3)$
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7	$\to x \neq f(4)$
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3	$\to x \neq f(5)$

$x = 0,\ 7\ 7\ 0\ 0\ 7\ \ldots$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Cantors 2. Diagonalargument

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0,1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f: \mathbb{N} \to (0,1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0,1)$ mit $x \notin \mathrm{Bild}(f)$. Widerspr.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(1) =$	0,	9	9	6	8	8	3	6	0	4	7
$f(2) =$	0,	1	2	3	9	8	1	2	6	4	9
$f(3) =$	0,	8	2	7	3	7	4	5	8	0	1
$f(4) =$	0,	1	7	8	7	4	9	0	3	0	7
$f(5) =$	0,	7	9	8	4	3	2	9	3	2	3
$x =$	0,	7	7	0	0	7	...				

Allgemein: bezeichne y_i den Wert der i-ten Nachkommastelle von y.

$$x_i := \begin{cases} 7 & \text{falls } f(i)_i \neq 7 \\ 0 & \text{falls } f(i)_i = 7 \end{cases}$$

$\longrightarrow x \notin \mathrm{Bild}(f)$

Idee: wähle 7 falls möglich, sonst 0.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Cantors 2. Diagonalargument

Theorem: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert.

Diagonalargument: Nehme an, $(0,1)$ wäre abzählbar mit Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Konstruiere Zahl $x \in (0,1)$ mit $x \notin \text{Bild}(f)$. Widerspr. ⚡

Wieso wir das machen...

In der Vorlesung wird bald die **Diagonalsprache** vorgestellt, die von Turing-Maschinen nicht erkannt werden kann.
Deren Konstruktion ist sehr ähnlich zu Cantors 2. Diagonalargument!