1. Klausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2018/2019

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnummer anbringen

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
Aufg. 1	3	2	2	2	9					
Aufg. 2	4	1	4	–	9				–	
Aufg. 3	6				6					
Aufg. 4	2	2	2	3	9					
Aufg. 5	1	1	9	–	11				–	
Aufg. 6	5	1	2	–	8				–	
Aufg. 7	1	3	1	3	8					
Σ					60					

Problem 1: Unendliche Automaten $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ Punkte

In der Vorlesung und in der Übung haben wir uns intensiv mit endlichen Automaten beschäftigt.

In dieser Aufgabe geht es um deterministische *unendliche* Automaten. Ein deterministischer unendlicher Automat ist ein Tupel $\mathcal{U} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, wobei Q eine nicht notwendigerweise endliche Zustandsmenge ist, Σ ein endliches Eingabealphabet, $s \in Q$ der Anfangszustand, $F \subseteq Q$ eine nicht notwendigerweise endliche Menge von akzeptierenden Zuständen und $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Zustandsüberführungsfunktion.

Im Gegensatz zu den Ihnen vertrauten deterministischen endlichen Automaten hat sich also nur verändert, dass Q und F jetzt unendlich groß sein dürfen.

Wir sagen, dass ein Automat $\mathcal{A}$ in *Baumnormalform* ist, wenn der Zustandsübergangsgraph ein gerichteter Baum ist, wenn also der Eingangsgrad aller Zustandsknoten höchstens Eins ist.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^\star$ eine beliebige Sprache. Geben Sie einen deterministischen unendlichen Automaten $\mathcal{U}_L$ in Baumnormalform an, der L entscheidet.

(b) Begründen Sie, dass $\mathcal{U}_L$ in Baumnormalform ist.

(c) Zeigen Sie, dass L von $\mathcal{U}_L$ entschieden wird.

(d) Aus den vorigen Teilaufgaben folgt, dass deterministische unendliche Automaten auch Sprachen entscheiden können, die von Turingmaschinen nicht entschieden werden können. Es ist also nicht möglich, den Beweis, dass die Diagonalsprache unentscheidbar ist, auf unendliche Automaten zu übertragen. Erklären Sie, woran das liegt.

Problem 2: Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen $4 + 1 + 4 = 9$ Punkte

Gegeben seien zwei endliche Alphabete Σ, Σ', eine reguläre Sprache L und eine surjektive Abbildung $f\colon \Sigma \to \Sigma'$. Wir erweitern f auf naheliegende Weise auf ganze Wörter: $f(w_1 \cdot w_2 \cdot \ \ldots \ \cdot w_n) := f(w_1) \cdot f(w_2) \cdot \ \ldots \ \cdot f(w_n)$. Damit definieren wir die Sprache $f(L)$ über Σ' als $f(L) := \{f(w) \mid w \in L\}$.

Hinweis: Surjektiv bedeutet, dass es für jedes Symbol $a \in \Sigma'$ ein $b \in \Sigma$ mit $f(b) = a$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass $f(L)$ regulär ist. Sei dazu ein DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben, der L erkennt. Konstruieren Sie einen NEA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma', \delta', s, F)$, der $f(L)$ erkennt, d.h. ändern Sie nur das Terminalalphabet und die Überführungsfunktion. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}'$ tatsächlich $f(L)$ erkennt.

(b) Welche Bedingungen müssen für f gelten, damit $\mathcal{A}'$ deterministisch ist?

(c) Betrachten Sie nun die Abbildung $g\colon \Sigma \to \Sigma'^{\star}$ und analog die Sprache $g(L)$. Symbole aus Σ werden nun also nicht mehr auf einzelne Symbole aus Σ', sondern auf ganze Wörter abgebildet. Zeigen Sie, dass auch $g(L)$ regulär ist. Wie muss Ihre Konstruktion aus Aufgabenteil (a) angepasst werden? Diesmal dürfen Sie auch zusätzliche Zustände hinzufügen.

Problem 3: Turingmaschinen 6 Punkte

Für $k \in \mathbb{N}_+$ ist die Komplexitätsklasse $\mathsf{NTAPE}(kn)$ definiert als die Menge der Sprachen, die von einer nichtdeterministischen Turingmaschine mit Platzbedarf höchstens kn entschieden werden können.

Zeigen Sie, dass für feste $k \in \mathbb{N}_+$ gilt, dass $\mathsf{NTAPE}(kn) = \mathsf{NTAPE}(n)$.

Problem 4: Entscheidbarkeit $2 + 2 + 2 + 3 = 9$ Punkte

In dieser Aufgabe geht es um einige kleine Erkenntnisse bezüglich Entscheidbarkeit.

(a) Nur Sprachen können (semi-)entscheidbar sein; es gibt nicht so etwas wie ein „unentscheidbares Wort“. Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass es kein Wort $w \in \Sigma^\star$ gibt, so dass jede Sprache, die w enthält, nicht entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Sprache L Turingmaschinen $\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^-$ existieren, die auf jeder Eingabe halten, so dass $\mathcal{M}^+$ jedes Wort in L akzeptiert und $\mathcal{M}^-$ jedes Wort, das nicht zu L gehört, ablehnt.

(c) Dass eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ die von ihr akzeptierte Sprache $L(\mathcal{M})$ nicht entscheidet, bedeutet nicht, dass $L(\mathcal{M})$ nicht entscheidbar ist. Beschreiben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}$, so dass $L(\mathcal{M})$ eine entscheidbare Sprache ist, $\mathcal{M}$ aber $L(\mathcal{M})$ nicht entscheidet.

(d) Sei L eine semi-entscheidbare Sprache. Vom 3. Übungsblatt wissen Sie, dass dann eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ existiert, die die Wörter von L aufzählt, d.h. nacheinander und eindeutig voneinander getrennt auf das Band schreibt. Bezeichne mit $w_1, w_2, \ldots$ die Wörter in der Reihenfolge, in der sie auf das Band geschrieben werden. Definiere K als die Sprache, die w_1 enthält und jedes w_i, für das alle Wörter w_j mit $j < i$ echt kürzer als w_i sind. Zeigen Sie, dass K entscheidbar ist.

Anmerkung: Damit haben Sie gezeigt, dass jede unendliche semi-entscheidbare Sprache eine unendliche entscheidbare Teilmenge hat.

Problem 5: NP-Vollständigkeit 1 + 1 + 9 = 11 Punkte

Das Entscheidungsproblem KNOTENÜBERDECKUNG ist wie folgt definiert:

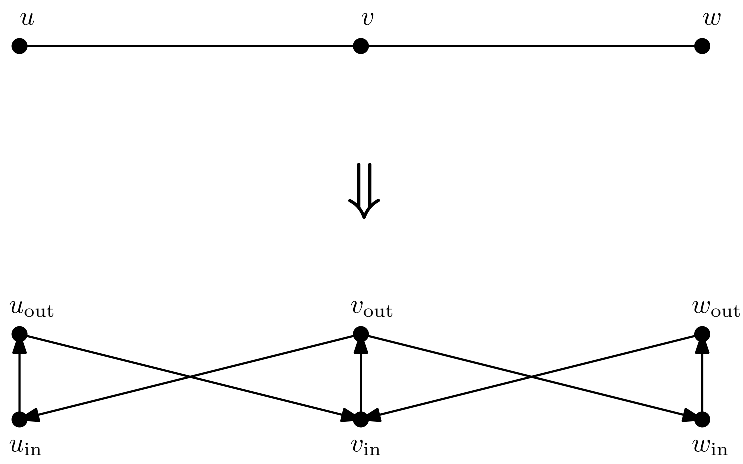
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$?

Das Entscheidungsproblem FEEDBACK ARC SET ist wie folgt definiert:

Gegeben: Gerichteter Graph $\overrightarrow{G} = (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{E})$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $\overrightarrow{E}' \subseteq \overrightarrow{E}$ mit $|\overrightarrow{E}'| \leq k$, sodass $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}')$ azyklisch ist?

Die NP-Vollständigkeit von FEEDBACK ARC SET kann über eine Reduktion von KNOTENÜBERDECKUNG gezeigt werden. Dabei wird die folgende Konstruktion genutzt, um den ungerichteten Graph $G = (V, E)$ aus der KNOTENÜBERDECKUNG-Instanz in einen gerichteten Graphen $\overrightarrow{G} = (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{E})$ zu transformieren: Für jeden Knoten $v \in V$ enthält $\overrightarrow{V}$ die zwei Knoten v_{in} und v_{out}, die durch die Kante $(v_{\text{in}}, v_{\text{out}})$ verbunden sind. Jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ wird außerdem auf die zwei Kanten $(u_{\text{out}}, v_{\text{in}})$ und $(v_{\text{out}}, u_{\text{in}})$ abgebildet.

Beispiel:



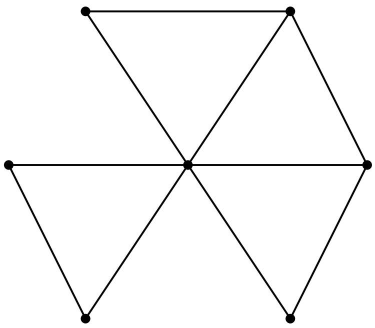
(a) Zeigen Sie: Jeder Zyklus in $\overrightarrow{G}$, der eine Kante der Form $(u_{\text{out}}, v_{\text{in}})$ enthält, enthält außerdem die Kanten $(u_{\text{in}}, u_{\text{out}})$ und $(v_{\text{in}}, v_{\text{out}})$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\overrightarrow{G}$ ein Feedback Arc Set der Größe k enthält, dann existiert auch ein Feedback Arc Set mit Größe $\leq k$, das nur Kanten der Form $(v_{\text{in}}, v_{\text{out}})$ enthält.

(c) Benutzen Sie die angegebene Transformation und die Aussagen aus den vorigen Aufgabenteilen, um zu zeigen, dass Feedback Arc Set NP-vollständig ist.

Problem 6: Approximationsalgorithmen $5+1+2=8$ Punkte

Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ lässt sich so in die Ebene zeichnen, dass jeder Knoten durch einen Punkt repräsentiert wird und jede Kante durch ein Geradensegment, das ihre beiden Endpunkte verbindet. Wir nennen G *planar*, wenn es eine solche Zeichnung gibt, in der sich keine Kanten kreuzen. Jeder Teilgraph eines planaren Graphen ist selbst wieder planar. Jeder planare Graph enthält einen Knoten mit höchstens fünf benachbarten Knoten.



Ein planarer Graph mit entsprechender Zeichnung in der Ebene.

Beim Minimierungsproblem COLOR ist ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ mit $V\neq\emptyset$ gegeben. Ziel ist es, G mit möglichst wenigen Farben zu färben, so dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe erhalten. Formal gilt es, eine Menge C und eine Abbildung $f:V\to C$ mit $f(u)\neq f(v)$ für alle $\{u,v\}\in E$ zu finden, und dabei $|C|$ zu minimieren.

(a) Geben Sie einen Algorithmus für COLOR für planare Graphen an, der konstant viele Farben benutzt.

(b) Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus aus Teilaufgabe (a) in polynomieller Zeit läuft.

(c) Ihr Algorithmus aus Teilaufgabe (a) kann als Approximationsalgorithmus aufgefasst werden. Welche absolute Gütegarantie hat Ihr Algorithmus? Begründen Sie.

Problem 7: Kellerautomaten $1 + 3 + 1 + 3 = 8$ Punkte

(a) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{S\}, S, R)$ mit

$$R = \{S \to \mathtt{1}S\mathtt{0} \mid \mathtt{0}S\mathtt{1} \mid \varepsilon\} \ .$$

Geben Sie die Sprache $L(G)$ in Mengenschreibweise an.

(b) Sei $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und $L = \{w \in \Sigma^\star \setminus \{\varepsilon\} \mid |w|_\mathtt{0} = |w|_\mathtt{1}\}$. Geben Sie eine Grammatik G in Greibach-Normalform an, so dass $L(G) = L$ gilt.

Sei $\mathcal{A} = (\{s,q\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \{Y,Z\}, \delta, s, Z, \emptyset)$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
(s,\mathtt{a},Z) & \mapsto & (s,YZ), & (s,\varepsilon,Z) & \mapsto & (s,\varepsilon) \\
(s,\mathtt{a},Y) & \mapsto & (s,YY), & (q,\mathtt{a},Y) & \mapsto & (q,\varepsilon) \\
(s,\mathtt{b},Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & (q,\mathtt{b},Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}$$

(c) Ist $\mathcal{A}$ deterministisch?

(d) Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes `aabaab`. Geben Sie dazu für jeden Schritt die Zustandsübergänge und den Zustand des Stacks an. Der Automat akzeptiert durch leeren Stack.