Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 28. November 2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Das Problem 3-SAT

Problem 3-SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Das Problem 3-SAT

Problem 3-SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Satz:
Das Problem 3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

3SAT$\in \mathcal{NP}$:

- Für eine feste Wahrheitsbelegung t kann in polynomialer Zeit $O(|C|)$ überprüft werden, ob t alle Klauseln aus C erfüllt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

SAT $\propto$ 3SAT:

- Wir geben eine polynomiale Transformation f von SAT zu 3SAT an.
- Gegeben sei eine SAT-Instanz I

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel c in I einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x$ aus **einem** Literal, so wird c auf $x \vee x \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel $c = x \vee y$ aus **zwei** Literalen, so wird c auf $x \vee y \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel c aus **drei** Literalen, so wird c auf sich selbst abgebildet.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel c in I einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ aus $k > 3$ Literalen, bilde c wie folgt ab:
  - Führe $k-3$ neue Variablen $y_{c,1}, \ldots, y_{c,k-3}$ ein.
  - Bilde c auf die folgenden $k-2$ Klauseln ab:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 \vee x_2 & \vee & y_{c,1} \\
\overline{y_{c,1}} \vee x_3 & \vee & y_{c,2} \\
& \vdots & \\
\overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} & \vee & y_{c,k-3} \\
\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} & \vee & x_k
\end{array}
$$

- Diese Klauseln lassen sich in Zeit $\mathcal{O}(|C| \cdot |U|)$ konstruieren.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Noch zu zeigen:

- I ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $f(I)$ ist erfüllbar

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

I ist erfüllbar $\Rightarrow f(I)$ ist erfüllbar

- Sei die SAT-Instanz I erfüllbar.
- Wir setzen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von I auf $f(I)$ fort.
- Wir untersuchen jede Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in I einzeln.
- Es ist mindestens ein x_i `wahr`.
- Fall $k \leq 3$: Damit ist auch $f(c)$ `wahr`.
- Fall $k > 3$: Falls $x_1 = \texttt{wahr}$ oder $x_2 = \texttt{wahr}$ ist, setze

$$y_{c,j} \equiv \texttt{falsch}$$

sonst setze, für ein $i > 2$ mit $x_i = \texttt{wahr}$,

$$y_{c,j} = \begin{cases} \texttt{wahr} & \text{falls } 1 \leq j \leq i-2 \\ \texttt{falsch} & \text{falls } i-1 \leq j \leq k-3 \end{cases}$$

- Diese Erweiterung erfüllt alle Klauseln in $f(c)$.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

I ist erfüllbar $\Leftarrow f(I)$ ist erfüllbar

- Wir zeigen: I ist nicht erfüllbar $\Rightarrow f(I)$ ist nicht erfüllbar.
- Sei also die SAT-Instanz I nicht erfüllbar.
- Wir betrachten eine beliebige Belegung der Variablen von $f(I)$.
- Da I nicht erfüllbar ist, gibt es eine Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in I bei der alle Literale x_i auf `falsch` gesetzt sind.
- c wird abgebildet auf

$$\begin{array}{r}
x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\
\overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\
\vdots \\
\overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\
\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k
\end{array}$$

- Um $f(c)$ zu erfüllen, müßten alle $y_{c,j}$ `wahr` sein.
- Dann ist die letzte Klausel $\overline{y_{c_{k-3}}} \vee x_{k-1} \vee x_k$ nicht erfüllt.
- Also ist die 3SAT–Instanz $f(I)$ nicht erfüllbar.

Das Problem 2SAT

Problem 2SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Satz:
Das Problem 2SAT liegt in $\mathcal{P}$.

Beweis: Übung

Das Problem MAX2SAT

Problem MAX2SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält
Zahl $K \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens K Klauseln erfüllt?

Satz:
Das Problem MAX2SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

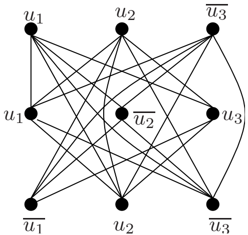
Beweis: Übung

Das Problem CLIQUE

Eine **Clique** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $V' \subseteq V$ so, dass für alle $i, j \in V'$, $i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$.

Problem CLIQUE

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \leq |V|$
Frage: Gibt es in G eine Clique der Größe mindestens K?



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Satz:
Das Problem CLIQUE ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
Beweis: Übung.

Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT $\propto$ CLIQUE

- Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine 3SAT-Instanz mit $c_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3}$ und $x_{ij} \in \{u_1, \ldots, u_m, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}\}$.

Wir transformieren C in eine CLIQUE-Instanz $(G = (V, E), K)$.

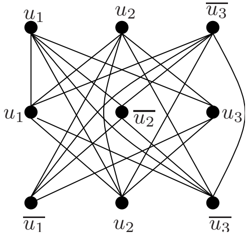
- V enthält $3n$ Knoten v_{ij} für $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3$.
- v_{ij} und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus E verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)
- Wir setzen $K := n$

Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- V enthält $3n$ Knoten v_{ij} für $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3$.
- v_{ij} und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus E verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- Die Transformation kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Noch zu zeigen:

- 3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar

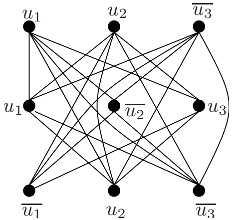
Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Rightarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar:

- Wähle eine beliebige erfüllende Wahrheitsbelegung von C.
- Wähle in jeder Klausel ein wahres Literal.
- Die entsprechenden Knoten in G bilden eine Clique der Größe n.

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

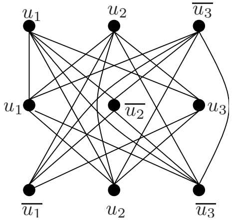
3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Leftarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar:

- Wähle eine Clique V' der Größe n in G.
- Die entsprechenden Literale sind
  - gleichzeitig erfüllbar
  - decken alle Klauseln ab

  und induzieren deswegen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von C.

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Das Problem COLOR

Problem COLOR

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens K Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

3COLOR bezeichnet das Problem COLOR mit festem Parameter $k = 3$.

Satz:
Das Problem 3COLOR ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

3COLOR $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Zeit $\mathcal{O}(|E|)$ überprüft werden, ob eine Färbung von Graph $G = (V, E)$ mit drei Farben zulässig ist.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

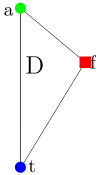
3SAT $\propto$ 3COLOR

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit Variablen $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ und Klauseln $\{c_1, \ldots, c_n\}$.
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine 3COLOR-Instanz G.
- Es soll gelten: I ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ G ist 3-färbbar.

Konstruktion von 3COLOR-Instanz G

Der Graph G enthält:

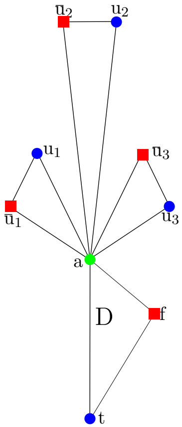
- Ein 'Hauptdreieck' aus Knoten {t, f, a} und Kanten {{t, f}, {f, a}, {t, a}}
- Interpretation: t, f, a sind die drei Farben mit denen G gefärbt wird.
- Interpretation: t: `wahr`, f: `falsch`



Konstruktion von 3COLOR-Instanz G

Der Graph G enthält:

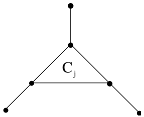
- Für jede Variable $u \in U$ ein Dreieck D_u mit Eckknoten $u, \overline{u}, a$.
- Interpretation: Falls u mit t gefärbt ist, muss $\overline{u}$ mit f gefärbt sein.



Konstruktion von 3COLOR-Instanz G

Der Graph G enthält für jede Klausel $c_j = x \vee y \vee z$ eine Komponente C_j wie folgt:

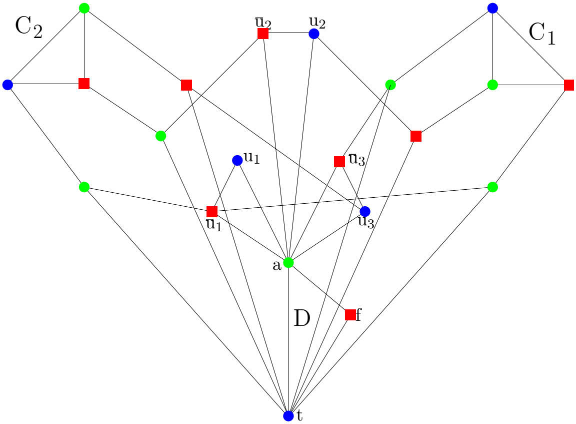
- C_j besteht aus sechs Knoten: einem „inneren Dreieck“ und drei „Satelliten“.



- Jeder der drei Satelliten wird mit einem der Literale x, y, z verbunden.
- Alle drei Satelliten werden mit dem Eckknoten t in D verbunden.

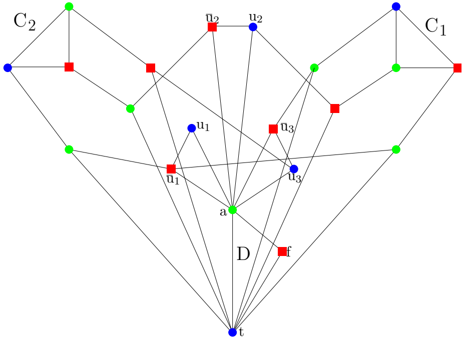
Beispielgraph zur Reduktion

$c_1 = \bar{u}_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3,\ c_2 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3$



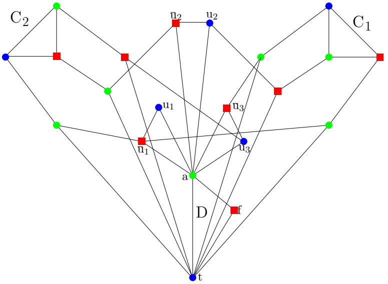
Polynomialität der Reduktion

- Die Knotenanzahl von G liegt in $\mathcal{O}(n+m)$.
- Deswegen ist die Transformation polynomial.



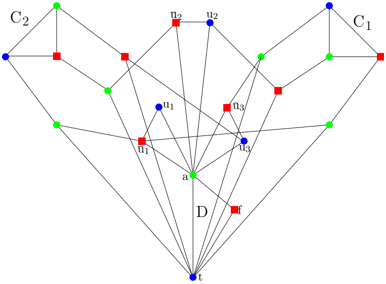
Instanz I erfüllbar ⇒ Instanz G erfüllbar

- Betrachte zulässige Wahrheitsbelegung für *I*.
- Färbe wahre Literale mit t, falsche Literale mit f.
- Im Klausel-Gadget:
  - Färbe Satelliten zu einem beliebigen wahren Literal mit f.
  - Färbe die beiden anderen Satelliten mit a.
  - Inneres Dreieck kann dann zulässig gefärbt werden.



Instanz I erfüllbar $\Leftarrow$ Instanz G erfüllbar

- Betrachte Dreifärbung von G.
- Färbung von Literal-Knoten induziert eine gültige Wahrheitsbelegung von I.



Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Das Problem EXACT COVER

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Beispiel:

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, \ldots, 7\} \\ \mathcal{S} &= \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \\ &\quad \{5,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\} \end{aligned}$$

Ist $(X, \mathcal{S})$ eine Ja-Instanz?

Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Beispiel:

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,\dots,7\} \\ \mathcal{S} &= \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3\}, \\ &\quad \{5,6,7\},\{4,5,6\},\{4,5,7\},\{4,6,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\} \\ \mathcal{S}' &= \{\{1,5\},\{2,3,4\},\{6,7\}\} \end{aligned}$$

Ja.

Das Problem EXACT COVER

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Satz:
Problem EXACT COVER ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

EXACT COVER $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ aus disjunkten Mengen besteht und X überdeckt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

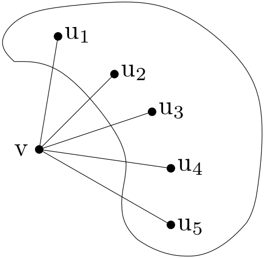
Karlsruher Institut für Technologie

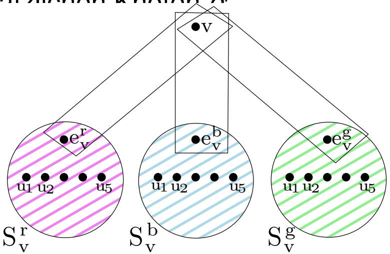
3COLOR $\propto$ EXACT COVER

- Sei $G = (V, E)$ eine 3COLOR-Instanz.
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine EXACT COVER-Instanz $(X, \mathcal{S})$.
- Es soll gelten: G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

Konstruktion von (X,S)

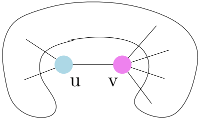
- Sei $C = \{r(\text{ot}), b(\text{lau}), g(\text{rün})\}$
- Sei $N(v) := \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ die Nachbarschaft von v.
- Für jedes $v \in V$ enthalte X ein „Element“ v und jeweils $3 \cdot |N(v)| + 3$ zusätzliche Elemente.
- Zu jedem $v \in V$ gebe es in $\mathcal{S}$ drei disjunkte Mengen S_v^r, S_v^b, S_v^g mit jeweils $|N(v)| + 1$ Elementen.
- Außerdem enthalte $\mathcal{S}$ für jedes v drei zweielementige Mengen $\{v, e_v^r\}, \{v, e_v^b\}$ und $\{v, e_v^g\}$ mit $e_v^r \in S_v^r$, $e_v^b \in S_v^b$ und $e_v^g \in S_v^g$.
- **Interpretation:** S_v^r entspricht der „Farbe“ r, enthält für jeden Knoten aus $N(v)$ eine Kopie und einen zusätzlichen Knoten e_v^r

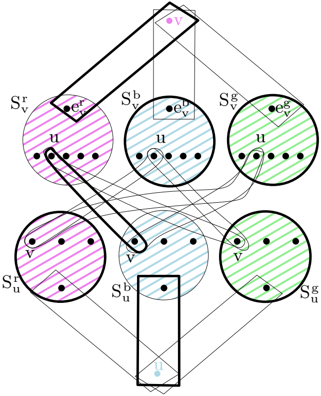




Konstruktion von (X,S)

- Außerdem enthält $\mathcal{S}$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und je zwei $c, c' \in C$, $c \neq c'$, die zweielementigen Mengen $\{u_v^c, v_u^{c'}\}$, $u_v^c \in S_v^c$ „Kopie" von u, $v_u^{c'} \in S_u^{c'}$ „Kopie" von v.





Konstruktion von (X,S)

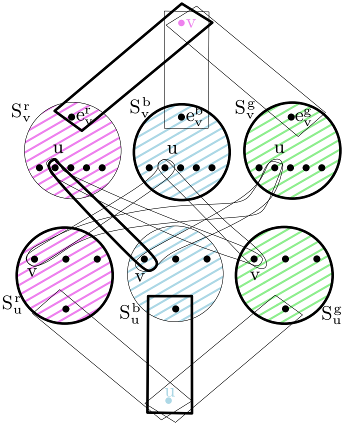
- Die Konstruktion ist polynomial.

Noch zu zeigen:

- G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow (X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

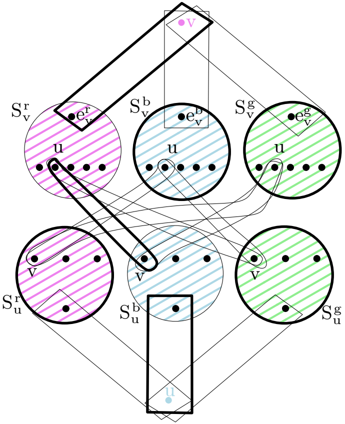
G dreifärbbar $\Rightarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei $\chi : V \to C$ eine zulässige Dreifärbung.
- $\mathcal{S}'$ enthalte für jedes $v \in V$ die Mengen $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und S_v^c mit $c \neq \chi(v)$.
- Diese Mengen überdecken alle Elemente exakt, außer den Elementen der Form $u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}$ für $\{u, v\} \in E$.
- Daher enthalte $\mathcal{S}'$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Menge $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$.
- Diese Menge existiert, da $\chi(u) \neq \chi(v)$, und damit überdeckt $\mathcal{S}'$ jedes Element aus X genau einmal.



G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei also $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung.
- Jedes Element v muss von genau einer Menge der Form $\{v, e_v^c\}$ überdeckt sein.
- Dies induziert eine Färbung χ von G mit den Farben r, b und g.
- Wir müssen beweisen, dass diese Färbung zulässig ist
- Da für jedes v bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann e_v^c mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge S_v^c überdeckt werden.



G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Da für jedes v bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann e_v^c mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge S_v^c überdeckt werden.
- Da die Mengen der Form $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und S_v^c, $c \neq \chi(v)$, alle Elemente außer den $u_v^{\chi(v)}$ mit $\{u, v\} \in E$ überdecken, müssen auch die Mengen $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$ für $\{u, v\} \in E$ in $\mathcal{S}'$ enthalten sein.
- Für diese gilt per Konstruktion $\chi(v) \neq \chi(u)$.