

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 11. Januar 2018

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

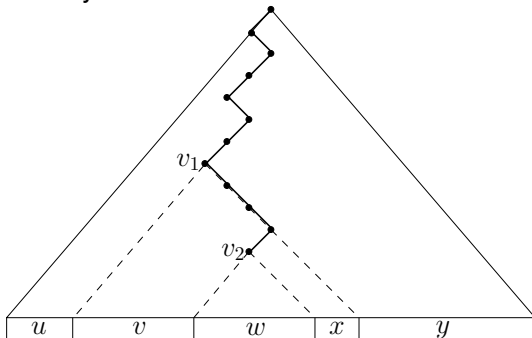
Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

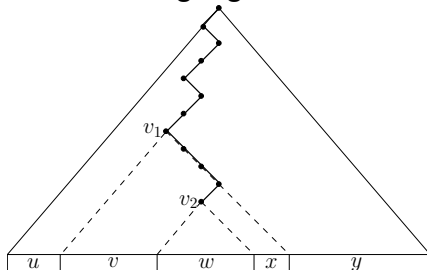
Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so lässt sich z so
als $z = uvwxy$ schreiben,

- dass von den mindestens n markierten Buchstaben
 - mindestens einer zu vx gehört und
 - höchstens n zu vwx gehören und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

- Sei L kontextfreie Sprache
- Sei G Grammatik zu L mit Variablen V in Chomsky-Normalform, d.h. alle Regeln sind von der Form $A \rightarrow BC$ oder $A \rightarrow a$.
- Setze $n := 2^{|V|+1}$.
- Wähle beliebiges Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$
- Betrachte einen Syntaxbaum T zu z .

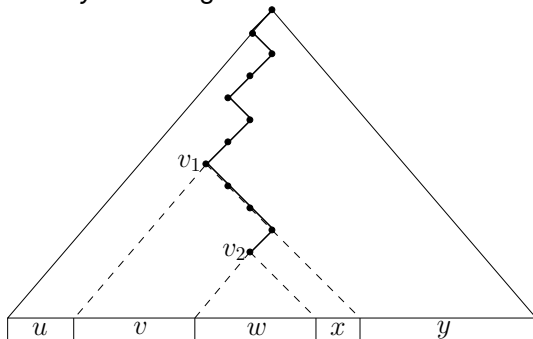


- T hat $|z|$ Blätter und alle inneren Knoten außer den Vorgängern der Blätter haben Grad 2, ansonsten Grad 1.
- Seien mindestens n Blätter markiert.
- Durchlaufe einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt. Wähle stets den Nachfolger, auf dessen Seite die größere Anzahl markierter Blätter liegt.
- Nenne Knoten auf dem Weg, für die rechter und linker Unterbaum markierte Blätter hat, **Verzweigungsknoten**.



Beweis

- Wegen $n > 2^{|V|}$ liegen auf dem Weg mindestens $|V| + 1$ Verzweigungsknoten
- Von den letzten $|V| + 1$ Verzweigungsknoten entsprechen mindestens zwei Knoten v_1, v_2 derselben Variablen A .
- Sei vwx Wort unter Teilbaum mit Wurzel v_1
- Sei w Wort unter Teilbaum mit Wurzel v_2 .
- Damit sind u und y eindeutig bestimmt.



- Da v_1 Verzweigungsknoten ist, enthält vx mindestens einen markierten Buchstaben.
- Da der Unterbaum von v_1 inkl. v_1 nur $|V| + 1$ Verzweigungsknoten enthält, gibt es in vwx höchstens $2^{|V|+1} = n$ markierte Buchstaben.
- Zu G existieren die Ableitungen

$$S \xrightarrow{*} uAy, \quad A \xrightarrow{*} vAx, \quad A \xrightarrow{*} w.$$

Daraus kann z abgeleitet werden durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uvwxy = z,$$

aber auch $uv^i wx^i y$ für jedes $i \geq 1$ durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uv^2 Ax^2 y \xrightarrow{*} \dots \rightarrow uv^i Ax^i y \rightarrow uv^i wx^i y.$$

Also ist auch $uv^i wx^i y \in L$ für $i \geq 0$.

- Der Spezialfall von Odgen's Lemma, in dem alle Buchstaben von z markiert sind, ist gerade das Pumping-Lemma.

Satz:

Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 ,$$

wobei $\mathcal{L}_i, 0 \leq i \leq 3$, Klasse der durch Typ- i -Grammatiken erzeugten Sprachen.

Es gibt eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextfrei und wird durch die Grammatik

$$V = \{S\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$R = \{S \rightarrow 01 \mid 0S1\} .$$

erzeugt. Sie ist aber nicht regulär.

(Siehe auch Beispiele zum Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextsensitiv.

Beweis

- L kontextsensitiv \Leftrightarrow es gibt NTM mit linearem Speicherbedarf für L
- Eingabe $w \in \{a, b, c\}^*$
- Überprüfe deterministisch, ob $w = a^i b^j c^k$
- Überprüfe deterministisch, ob $j = i$ und $k = i$
- Speicherbedarf: $i + j + k$, also linear
- $\Rightarrow L$ kontextsensitiv

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist nicht kontextfrei.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis

- Annahme: L sei kontextfrei. Sei dann n wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort $z = a^n b^n c^n \in L$.
- Wir betrachten eine Zerlegung $z = uvwxy$ wie im PL gefordert:
 - $|vx| \geq 1$,
 - $|vwx| \leq n$ und
 - für alle $i \geq 0$ ist das Wort $uv^i wx^i y \in L$.

Die Sprache $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis

- Annahme: L sei kontextfrei. Sei dann n wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort $z = a^n b^n c^n \in L$.
- Wir betrachten eine Zerlegung $z = uvwxy$ wie im PL gefordert:
 - $|vx| \geq 1$,
 - $|vwx| \leq n$ und
 - für alle $i \geq 0$ ist das Wort $uv^i wx^i y \in L$.
- Fallunterscheidung, Fall 1: vwx besteht nur aus a und b
 - Dann enthält vx mindestens ein a oder b .
 - Damit ist $uv^0 wx^0 y = a^i b^j c^n \notin L$ weil entweder $i < n$ oder $j < n$.
 - Dies ist ein Widerspruch zum PL.

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis

- Annahme: L sei kontextfrei. Sei dann n wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort $z = a^n b^n c^n \in L$.
- Wir betrachten eine Zerlegung $z = uvwxy$ wie im PL gefordert:
 - $|vx| \geq 1$,
 - $|vwx| \leq n$ und
 - für alle $i \geq 0$ ist das Wort $uv^i wx^i y \in L$.
- Fallunterscheidung, Fall 2: vwx besteht nur aus b und c
 - Dann enthält vx mindestens ein b oder c .
 - Damit ist $uv^0 wx^0 y = a^n b^i c^j \notin L$ weil entweder $i < n$ oder $j < n$.
 - Dies ist ein Widerspruch zum PL.

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so lässt sich z so
als $z = uvwxy$ schreiben,

- dass von den mindestens n markierten Buchstaben
 - mindestens einer zu vx gehört und
 - höchstens n zu vw gehören und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i wx^i y \in L$ ist.

Die Sprache $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Alternativer Beweis mit Odgen's Lemma

- Annahme: L sei kontextfrei.
- Sei dann n wie in Odgen's Lemma gefordert.
- Wähle das Wort $z = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L$.
- Markiere alle b .
- Damit enthält vwx mindestens ein b aber kein a oder kein c .
- Es enthalte vwx kein c (anderer Fall analog)
- Damit ist $uv^0 wx^0 y = a^i b^j c^n \notin L$ weil entweder $i < n$ oder $j < n$.
- Dies ist ein Widerspruch zu Odgen's Lemma.

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_U die universelle Sprache.

Wiederholung

Die **universelle Sprache** L_U über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$L_U := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_U ist also die Menge aller Wörter wv für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_U die universelle Sprache.

- L_U ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar (Kapitel 3).
- Wegen der Semi-entscheidbarkeit gilt $L_U \in \mathcal{L}_0$.
- Annahme: $L_U \in \mathcal{L}_1$.
- Dann gibt es eine NTM, die L_U mit linearem Speicher erkennt.
- Mit linearem Speicher können nur exponentiell viele verschiedene Konfigurationen auftreten.
- Diese könnte durch eine DTM durch Ausprobieren aller möglichen Konfigurationen simuliert werden.
- Dies wäre ein Widerspruch zur Nichtentscheidbarkeit von L_U .

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable A heißt **nutzlos**, falls es keine Ableitung $S \xrightarrow{*} w$ gibt, $w \in \Sigma^*$, in der A vorkommt.

Satz:

Für eine kontextfreie Grammatik kann die Menge der nutzlosen Variablen (in polynomialer Zeit) berechnet werden.

Beweis:

- Wir benutzen ein zweistufiges Verfahren.

Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \xrightarrow{*} w\}$

- Initialisiere eine leere Queue Q .
- Füge alle $A \in V$ mit $A \rightarrow w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.
- Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q
 - Ersetze jede Regel
 $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
durch die Regeln
 $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
 - Wenn dabei eine Regel der Form
 $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$,
entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.
- Das Verfahren endet, wenn Q leer ist.

Bemerkung 1

- Falls $S \notin V'$, breche das Verfahren ab.
- G erzeugt dann die leere Sprache und alle Variablen sind nutzlos.

Bemerkung 2

- Für jede Variable A mit $A \xrightarrow{*} w$ für ein $w \in \Sigma^*$ gilt:
- Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $A \xrightarrow{*} w$ kann für A gezeigt werden, dass $A \in V'$.

Beispiel: Schritt 1

Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Produktionen R gegeben durch

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

Beispiel: Schritt 1

Füge alle $A \in V$ mit $A \rightarrow w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \emptyset$$

$$Q = \emptyset$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A\}$$

$$Q = \{A\}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A\}$$

$$Q = \{A\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{S, D\}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{S, D\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcaD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{D\}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcaD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{D\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bca**bc**b$$

$$V' = \{A, S, D, **E**\}$$

$$Q = \{**E**\}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcabcb$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcabcb$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$Q = \{E\}$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$Q = \{\}$$

Bestimme alle Variablen in V' , die vom Startsymbol aus „erreicht“ werden können.

Formal: Berechne $\{A \in V' \mid S = A \text{ oder } \exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*} \alpha A \beta\}$

- Starte mit $V'' = \{S\}$
- Füge zu allen Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.
- Wiederhole den letzten Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $S \rightarrow \alpha A \beta$, $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, kann dann wieder die Korrektheit bewiesen werden.

Fazit: Nach Ende von Schritt 2 ist V'' die Menge aller nützlichen Variablen.

Beispiel: Schritt 2

Starte mit $V'' = \{S\}$

$S \rightarrow Aa|B|Cab$

$A \rightarrow bc|A$

$B \rightarrow Bd|Cd$

$C \rightarrow aBc$

$D \rightarrow Ab$

$E \rightarrow SD$

$V' = \{A, S, D, E\}$

$V'' = \{\}$

$S \rightarrow Aa|B|Cab$

$A \rightarrow bc|A$

$B \rightarrow Bd|Cd$

$C \rightarrow aBc$

$D \rightarrow Ab$

$E \rightarrow SD$

$V' = \{A, S, D, E\}$

$V'' = \{S\}$

Beispiel: Schritt 2

Füge zu allen Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S\}$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$

Beispiel: Schritt 2

Wiederhole den letzten Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$

Korollar

Für eine kontextfreie Grammatik G kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Beweis:

- $L(G) = \emptyset$ genau dann, wenn S nutzlos.

Satz:

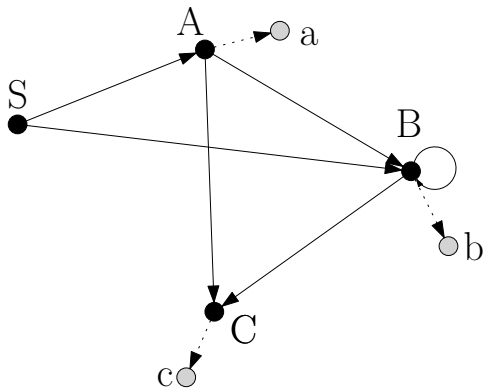
Für eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G)$ endlich ist.

Beweis:

- Entferne alle nutzlosen Variablen
- Überführe G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.
- Betrachte den gerichteten Graphen (V, E) mit
 - Knotenmenge V ist gleich der Variablenmenge von G
 - Kantenmenge $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V : A \rightarrow BC \in R \vee A \rightarrow CB \in R\}$
- Mit Tiefensuche kann entschieden werden, ob dieser Graph einen Kreis enthält.
- Man kann sich leicht überlegen, dass $L(G)$ genau dann endlich ist, wenn der entsprechende Graph keinen Kreis enthält.

Beispielgraph

$S \rightarrow AB$
 $A \rightarrow BC$
 $B \rightarrow BC$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow b$
 $C \rightarrow c$



Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Vereinigung: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$$

S neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$$

erzeugt $L_1 \cup L_2$.

Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Konkatenation: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$$

S neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}$$

erzeugt $L_1 \cdot L_2$.

Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Kleenscher Abschluss: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup \{S\}$$

S neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS, S \rightarrow S_1\}$$

erzeugt L_1^* .

Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis Schnitt: Betrachte die kontextfreien Sprachen

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^n \mid n \geq 1\} & L_2 &= \{c\}^* \\ L_3 &= \{a\}^* & L_4 &= \{b^n c^n \mid n \geq 1\} \end{aligned}$$

Nach dem letzten Satz sind dann auch $L_1 \cdot L_2$ und $L_3 \cdot L_4$ kontextfrei.
Es ist dann

$$L := L_1 L_2 \cap L_3 L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei.

Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis Komplementbildung:

- Angenommen, die Klasse der kontextfreien Sprachen wäre bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
- Dann würde für beliebige kontextfreie Sprachen L_1, L_2 gelten $(L_1^c \cup L_2^c)^c = L_1 \cap L_2$ ist wieder kontextfrei.
- Dies ist ein Widerspruch zur ersten Aussage des Satzes.