

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 19. Dezember 2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



■ Grammatiken

Grammatiken sind Regelsysteme, mit denen sich die Wörter einer vorgegebenen Sprache erzeugen lassen.

Grammatiken sind Regelsysteme, mit denen sich die Wörter einer vorgegebenen Sprache erzeugen lassen.

Beispiel 1 - Cliques

Die Sprache aller Graphen $G = (V, E)$, die eine Clique der Größe $\frac{|V|}{2}$ enthalten, lässt sich aufbauen durch:

- 1 Wahl der Zahl n für $|V|$
- 2 Wahl einer Teilmenge der Größe $\frac{|V|}{2}$
- 3 Zugabe aller Kanten zwischen Knoten aus dieser Teilmenge
- 4 Zugabe weiterer Kanten

Dieses Regelsystem ist an drei Stellen nichtdeterministisch: 1, 2 und 4.

Grammatiken sind Regelsysteme, mit denen sich die Wörter einer vorgegebenen Sprache erzeugen lassen.

Beispiel 2 - Arithmetische Ausdrücke

- a , $a + a$ und $a \cdot a$ sind arithmetische Ausdrücke (a Symbol aus Alphabet).
- falls A_1 und A_2 arithmetische Ausdrücke sind, so sind auch $(A_1) + (A_2)$ und $(A_1) \cdot (A_2)$ arithmetische Ausdrücke.

Die Klammern sind teilweise überflüssig.

Eine **Grammatik** $G = (\Sigma, V, S, R)$ besteht aus vier Komponenten:

- Endliches **Alphabet** Σ (auch Terminalalphabet genannt);
- Endliche Menge V mit $V \cap \Sigma = \emptyset$ von **Variablen** (Nichtterminale)
- **Startsymbol** $S \in V$;
- Endliche Menge von **Ableitungsregeln** R (Produktionen).

Dabei ist eine Ableitungsregel ein Paar (ℓ, r) , wobei

- $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$
- $r \in (V \cup \Sigma)^*$.

Wir schreiben oft auch $\ell \rightarrow r$.

Bedeutung

- Wenn in einem Wort z das Wort ℓ Teilwort von z ist, so darf ℓ durch r in z ersetzt werden.

Notation

- Wir schreiben $w \rightarrow z$, wenn w durch Anwendung einer Ableitungsregel in z verwandelt wird.
- Wir schreiben $w \xrightarrow{*} z$, wenn w durch eine Anwendung von mehreren Ableitungsregeln in z verwandelt wird.

Erzeugte Sprache

- Die von einer Grammatik G **erzeugte Sprache** $L(G)$ ist die Menge aller Wörter $z \in \Sigma^*$, für die $S \xrightarrow{*} z$ gilt.

Grammatik für die Menge aller arithmetischen Ausdrücke über a .

$$\Sigma = \{ (,), a, +, \cdot \}$$

$$V = \{ S \}$$

$$R : S \rightarrow (S) + (S)$$

$$S \rightarrow (S) \cdot (S)$$

$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow a + a$$

$$S \rightarrow a \cdot a$$

- **Typ-0:** Grammatiken ohne weitere Einschränkungen.
- **Typ-1/kontextsensitiv:** Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form
 - $u \rightarrow v$ mit $u \in V^+$, $v \in ((V \cup \Sigma) \setminus \{S\})^+$ und $|u| \leq |v|$, oder
 - $S \rightarrow \varepsilon$
- **Typ-2/kontextfrei:** Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form

$$A \rightarrow v \quad \text{mit } A \in V \text{ und } v \in (V \cup \Sigma)^*$$

- **Typ-3/rechtslinear:** Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form

$$A \rightarrow v \quad \text{mit } A \in V \text{ und } v = \varepsilon \text{ oder } v = aB \text{ mit } a \in \Sigma, B \in V$$

- **Typ-1/kontextsensitiv:** Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form
 - $u \rightarrow v$ mit $u \in V^+$, $v \in ((V \cup \Sigma) \setminus \{S\})^+$ und $|u| \leq |v|$, oder
 - $S \rightarrow \varepsilon$

Bemerkung: Bei kontextsensitiven Grammatiken kann die Ableitung

$$ABC \rightarrow AXYC$$

erlaubt, aber

$$DBC \rightarrow DXYC$$

verboten sein.

- **Typ-0:** Grammatiken ohne weitere Einschränkungen.

Satz:

Falls L rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar) ist, so gibt es eine Chomsky-0-Grammatik mit $L(G) = L$.

Satz:

Falls L rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar) ist, so gibt es eine Chomsky-0-Grammatik mit $L(G) = L$.

Beweis:

- L rekursiv aufzählbar $\Rightarrow \exists$ DTM \mathcal{M} , die L akzeptiert.
- O.B.d.A. habe \mathcal{M} genau einen akzeptierenden Endzustand q_f .
- O.B.d.A. stehen auf dem Band nur Blanks wenn q_f erreicht wird.
- q_0 komme nur in der Anfangskonfiguration vor.

Wir konstruieren eine Grammatik $G = (\Sigma, V = \Gamma \cup Q \cup \{S\}, S, R)$, die die Berechnung von $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, s, \delta, F)$ rückwärts durchläuft.

■ Rückwärtsrechnung

Falls $\delta(q, a) = (q', a', R)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$a'q' \rightarrow qa.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', L)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'ba' \rightarrow bqa \quad \text{für alle } b \in \Gamma.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', N)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'a' \rightarrow qa.$$

■ Erzeugung der akzeptierenden Schlusskonfiguration

$$S \rightarrow q_J, \quad q_J \rightarrow \sqcup q_J, \quad q_J \rightarrow q_J \sqcup$$

■ Rückwärtsrechnung

Falls $\delta(q, a) = (q', a', R)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$a'q' \rightarrow qa.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', L)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'ba' \rightarrow bqa \quad \text{für alle } b \in \Gamma.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', N)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'a' \rightarrow qa.$$

■ Rückwärtsrechnung

Falls $\delta(q, a) = (q', a', R)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$a'q' \rightarrow qa.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', L)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'ba' \rightarrow bqa \quad \text{für alle } b \in \Gamma.$$

Falls $\delta(q, a) = (q', a', N)$, dann enthält G die Ableitungsregel

$$q'a' \rightarrow qa.$$

■ Schlussregeln

Transformiere $\sqcup \sqcup \dots \sqcup q_0 w_1 \dots w_n \sqcup \sqcup \dots \sqcup$ zu $w_1 \dots w_n$

$$\sqcup q_0 \rightarrow q_0, \quad q_0 a \rightarrow a q_0, \quad q_0 \sqcup \rightarrow q_0, \quad q_0 \rightarrow \varepsilon$$

- Alle Wörter $w \in L$ können durch G erzeugt werden, indem die Berechnung von \mathcal{M} rückwärts durchlaufen wird.
- Umgekehrt kann G nur Berechnungen von \mathcal{M} rückwärts erzeugen.
- Daher ist $L(G) = L$.

- **Typ-0:** Grammatiken ohne weitere Einschränkungen.

Satz:

Die von Typ-0-Grammatiken G erzeugten Sprachen sind rekursiv aufzählbar.

Satz:

Die von Typ-0-Grammatiken G erzeugten Sprachen sind rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wir konstruieren zunächst eine NTM \mathcal{M} , die $L(G)$ akzeptiert:

- 1 Schreibe S auf das Band.
- 2 Wähle eine beliebige anwendbare Ableitungsregel aus.
- 3 Vergleiche das erzeugte Wort mit der Eingabe w .
- 4 Bei Gleichheit wird w akzeptiert.
- 5 Ansonsten springe zu Punkt 2.

Falls $w \in L(G)$, so gibt es eine akzeptierende Berechnung.

Satz:

Die von Typ-0-Grammatiken G erzeugten Sprachen sind rekursiv aufzählbar.

Beweis:

Es ist möglich aus der NTM eine DTM zu konstruieren, die dasselbe leistet. Dies wird in der nächsten Übung (am 17.01.) gezeigt.

Die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist genau

- die Klasse der von DTMs akzeptierten Sprachen,
- die Klasse der von NTMs akzeptierten Sprachen,
- die Klasse der von Typ-0-Grammatiken erzeugten Sprachen.

Bemerkung

- Das Wortproblem für Typ-0-Grammatiken ist unentscheidbar.
- Als Grundlage für Programmiersprachen sind die Typ-0-Grammatiken also sicherlich zu allgemein.

- **Typ–3/rechtslinear:** Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form

$$A \rightarrow v \quad \text{mit } A \in V \text{ und } v = \varepsilon \text{ oder } v = aB \text{ mit } a \in \Sigma, B \in V$$

Satz:

Die Klasse der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen ist genau die Klasse der von Chomsky–3–Grammatiken erzeugten Sprachen.

\Rightarrow Zu einem DEA $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gibt es eine Typ-3 Grammatik G_L , die $L(\mathcal{A}_L)$ erzeugt.

\Rightarrow Zu einem DEA $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gibt es eine Typ-3 Grammatik G_L , die $L(\mathcal{A}_L)$ erzeugt.

G_L sei definiert durch:

- $V := Q$;
- $S := q_0$;
- R enthält die Regel
 - $q \rightarrow \varepsilon$ für alle $q \in F$,
 - $q \rightarrow aq'$, falls $\delta(q, a) = q'$.

\Rightarrow Zu einem DEA $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gibt es eine Typ-3 Grammatik G_L , die $L(\mathcal{A}_L)$ erzeugt.

G_L sei definiert durch:

- $V := Q$;
- $S := q_0$;
- R enthält die Regel
 - $q \rightarrow \varepsilon$ für alle $q \in F$,
 - $q \rightarrow aq'$, falls $\delta(q, a) = q'$.

Für $w = w_1 \dots w_n$ durchlaufe \mathcal{A}_L die Zustände $q_0, \dots, q_n \in Q$ mit $q_n \in F$.
Dann gilt:

$$q_0 \rightarrow w_1 q_1 \rightarrow w_1 w_2 q_2 \rightarrow \dots \rightarrow w q_n \rightarrow w$$

⇒ Zu einem DEA $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gibt es eine Typ-3 Grammatik G_L , die $L(\mathcal{A}_L)$ erzeugt.

G_L sei definiert durch:

- $V := Q$;
- $S := q_0$;
- R enthält die Regel
 - $q \rightarrow \varepsilon$ für alle $q \in F$,
 - $q \rightarrow aq'$, falls $\delta(q, a) = q'$.

Außerdem gibt es für alle Ableitungen von G_L eine entsprechende akzeptierende Berechnung des endlichen Automaten \mathcal{A}_L .

\Leftarrow Zu einer Typ-3 Grammatik G_L gibt es einen NEA $\mathcal{A}_L := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der $L(G_L)$ akzeptiert.

⇐ Zu einer Typ-3 Grammatik G_L gibt es einen NEA $\mathcal{A}_L := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der $L(G_L)$ akzeptiert.

- $Q := V$;
- $q_0 := S$;
- $F := \{A \in V \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in R\}$
- $\delta(A, a) := \{B \mid (A \rightarrow aB) \in R\}$.

⇐ Zu einer Typ-3 Grammatik G_L gibt es einen NEA $\mathcal{A}_L := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der $L(G_L)$ akzeptiert.

- $Q := V$;
- $q_0 := S$;
- $F := \{A \in V \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in R\}$
- $\delta(A, a) := \{B \mid (A \rightarrow aB) \in R\}$.

Für $w = w_1 \dots w_n \in L$ hat die Ableitung von w mittels G_L das Aussehen:

$$S \rightarrow w_1 A_1 \rightarrow w_1 w_2 A_2 \rightarrow \dots \rightarrow w A_n \rightarrow w$$

\mathcal{A}_L kann bei Eingabe $w = w_1 \dots w_n$ folgende Abarbeitung durchlaufen:

$$S \xrightarrow{w_1} A_1 \xrightarrow{w_2} A_2 \xrightarrow{w_3} \dots \xrightarrow{w_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{w_n} A_n,$$

wobei $A_n \in F$, also w akzeptiert wird.

⇐ Zu einer Typ-3 Grammatik G_L gibt es einen NEA $\mathcal{A}_L := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der $L(G_L)$ akzeptiert.

- $Q := V$;
- $q_0 := S$;
- $F := \{A \in V \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in R\}$
- $\delta(A, a) := \{B \mid (A \rightarrow aB) \in R\}$.

Außerdem gibt es für alle akzeptierenden Berechnungen von \mathcal{A}_L eine entsprechende Ableitung in G_L .

- Wir wissen, dass die Sprache der korrekten Klammersausdrücke nicht regulär ist.
- Typ-3-Grammatiken sind also zu einschränkend, um syntaktisch korrekte Programme zu beschreiben.

Fazit: Programmiersprachen sollten echt zwischen Typ-0 und Typ-3 angesiedelt sein.

Chomsky-1-Grammatiken bzw. kontextsensitive Sprachen

Annahme:

- Die Eingabe einer Turingmaschine steht auf einem separaten Read-Only-Band.
- Der Speicherbedarf einer Turingmaschine wird nur anhand des Arbeitsbandes gemessen.

- $DTAPE(s(n))$ ist die Klasse der Sprachen L , für die es eine **DTM** mit Platzbedarf $s(n)$ (bei Eingabelänge n) gibt, die L akzeptiert.
- $NTAPE(s(n))$ ist die Klasse der Sprachen L , für die es eine **NTM** mit Platzbedarf $s(n)$ (bei Eingabelänge n) gibt, die L akzeptiert.

- $DTAPE(s(n))$ ist die Klasse der Sprachen L , für die es eine **DTM** mit Platzbedarf $s(n)$ (bei Eingabelänge n) gibt, die L akzeptiert.
- $NTAPE(s(n))$ ist die Klasse der Sprachen L , für die es eine **NTM** mit Platzbedarf $s(n)$ (bei Eingabelänge n) gibt, die L akzeptiert.

Offensichtlich gilt

$$DTAPE(s(n)) \subseteq NTAPE(s(n))$$

Außerdem gilt

$$NTAPE(n) = NTAPE(f(n))$$

für alle $f(n) \in \theta(n)$.

Satz:

Die Klasse der von Chomsky-1-Grammatiken erzeugten Sprachen stimmt mit der Klasse $\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{E}(n)$ überein.

Ohne Beweis.

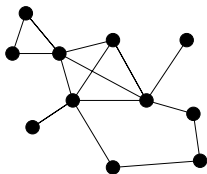
Bemerkung

Es ist offen, ob $\mathcal{NTAPE}(n) = \mathcal{DTAPE}(n)$ ist.

Eine **Clique** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $V' \subseteq V$ so, dass für alle $i, j \in V', i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$.

Problem CLIQUE

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \leq |V|$
Frage: Gibt es in G eine Clique der Größe mindestens K ?



Satz:

Das Cliques-Problem gehört zu $DTAPE(n)$.

- Gegeben sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und $1 \leq K \leq n$.
- Benutze n -Vektor $c \in \{0, 1\}^n$ mit der Bedeutung für eine Menge C

$$c_i = 1 \iff i \in C.$$

- Teste für jeden Vektor $c \in \{0, 1\}^n$, ob die zugehörige Menge $C \subseteq V$ eine Clique der Größe K in G ist:
 - Zähle die Einsen in c .
 - Überprüfe für jedes Paar c_i, c_j mit $c_i = c_j = 1$, ob $\{i, j\} \in E$.

Satz:

Das Cliques-Problem gehört zu $DTAPE(n)$.

Alle Vektoren $c \in \{0, 1\}^n$ können nacheinander, beginnend mit $(0, 0, \dots, 0)$, durchgetestet werden, wobei:

- nach einem positiven Test (G, K) akzeptiert wird;
- nach einem negativen Test der Vektor durch seinen lexikalischen Nachfolger überschrieben wird.

Dazu wird insgesamt nur linearer Speicherplatz benötigt.

Bemerkung 1

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, kann das Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken im Allgemeinen nicht in polynomialer Zeit entschieden werden.

Bemerkung 2

Für jede Chomsky-1-Grammatik gibt es eine äquivalente Chomsky-1-Grammatik, bei der alle Regeln folgende Form haben:

- $A \rightarrow C$
- $A \rightarrow CD$
- $AB \rightarrow CD$
- $A \rightarrow a$
- $S \rightarrow \varepsilon$

wobei jeweils $A, B \in V$, $C, D \in V \setminus \{S\}$ und $a \in \Sigma$.

Notation

Statt Regeln

$$S \rightarrow \alpha \text{ und } S \rightarrow \beta$$

schreiben wir abkürzend

$$S \rightarrow \alpha \mid \beta$$

Typ-2 / Kontextfreie Grammatiken

Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form

$$A \rightarrow v \quad \text{mit } A \in V \text{ und } v \in (V \cup \Sigma)^*$$

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 1

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 1

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

wird erzeugt durch die Grammatik

$$V = \{S\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$R = \{S \rightarrow 01 \mid 0S1\} .$$

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 2

Sei $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$ die Sprache der Palindrome über $\{0, 1\}$.

Es gilt:

- 1 $0, 1, \varepsilon$ sind Palindrome
- 2 falls w Palindrom, so auch $0w0$ und $1w1$
- 3 alle Palindrome lassen sich durch endliche viele Anwendungen von $(0w0)$ und $(1w1)$ erzeugen

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 2

Sei $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$ die Sprache der Palindrome über $\{0, 1\}$.

Es gilt:

- 1 $0, 1, \varepsilon$ sind Palindrome
- 2 falls w Palindrom, so auch $0w0$ und $1w1$
- 3 alle Palindrome lassen sich durch endliche viele Anwendungen von (??.) und (??.) erzeugen

Zugehörige kontextfreie Grammatik:

$$\begin{aligned}V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ R &= \{S \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1, \\ &\quad S \rightarrow 0S0 \mid 1S1\}\end{aligned}$$

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 3

Sei L die Sprache aller $w \in \{0, 1\}^+$ bei denen die Anzahl der Nullen gleich der Anzahl der Einsen ist.

Typ-2 Grammatiken: Beispiel 3

Sei L die Sprache aller $w \in \{0, 1\}^+$ bei denen die Anzahl der Nullen gleich der Anzahl der Einsen ist.

Setze

$$V = \{S, A, B\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$R = \{S \rightarrow 0B \mid 1A, \\ A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA, \\ B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

Durch Induktion über die Länge der durch G erzeugten Wörter lässt sich beweisen, dass $L = L(G)$.