Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 7

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 17/18

Ausgabe 24. Januar 2018
Abgabe 6. Februar 2018, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1 (1 + 2 = 3 Punkte)

Sei $G = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{A, B, C, D, E\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$ die durch folgende Regelmenge gegebene Grammatik:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid AC \mid DD \\ A & \to & a \\ B & \to & b \\ C & \to & SB \mid SC \\ D & \to & AE \mid EB \mid E \\ E & \to & DA \mid DB \end{array}$$

(a) Enthält die Grammatik nutzlose Symbole? Wenn ja, welche?

(b) Ist die von der Grammatik erzeugte Sprache endlich? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Die Grammatik muss dazu nicht notwendigerweise in Chomsky-Normalform gebracht werden.

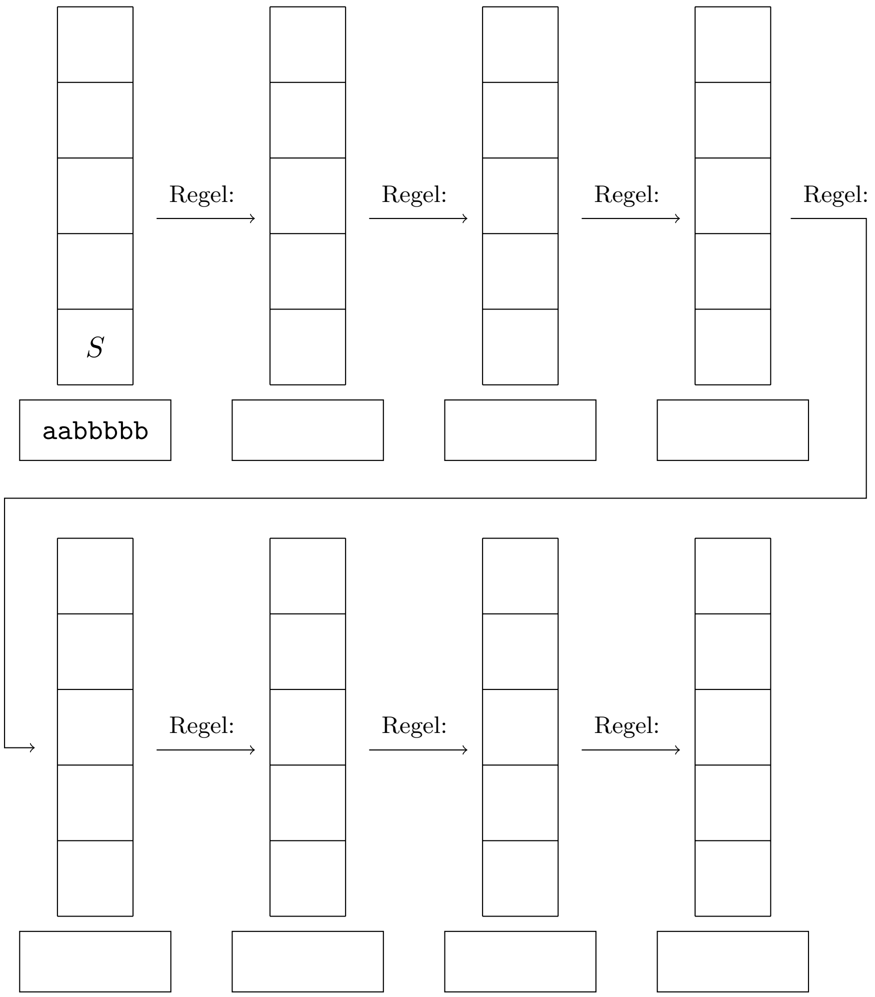
Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die kontextfreie Grammatik G_3 in Greibach-Normalform über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ sei definiert durch die Menge der Nichtterminalsymbole $\{S, B, X\}$, Startsymbol S und folgenden Ableitungsregeln:

$$S \to \mathtt{a}SB \quad (1)$$
$$S \to \mathtt{b}X \quad (2)$$
$$X \to \mathtt{b}X \quad (3)$$
$$X \to \mathtt{b} \quad (4)$$
$$B \to \mathtt{b} \quad (5)$$

In Vorlesung und Übung wurde ein nichtdeterministischer Kellerautomat vorgestellt, der Sprachen erkennen kann, die von Grammatiken in Greibach-Normalform erzeugt werden. Geben Sie die

Konfigurationen dieses Automaten an, die bei Abarbeitung der Eingabe `aabbbbb` entstehen. Vervollständigen Sie dazu folgendes Schema mit den zu lesenden Worten, den Stackinhalten und den Regeln, die beim Übergang verwendet werden. Ist das Eingabewort in der Sprache $L(G_3)$ enthalten?



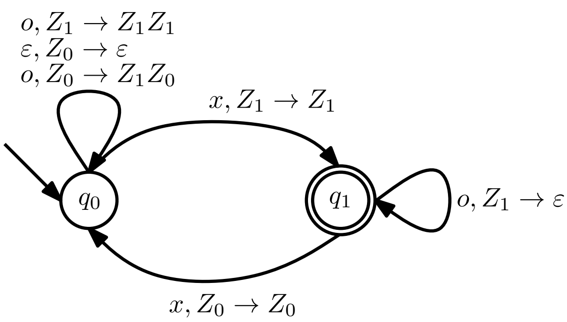
Aufgabe 3

(0,5 + 0,5 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Betrachten Sie den Kellerautomaten

$$\mathcal{A} = (Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{o, x\}, \Gamma = \{Z_0, Z_1\}, q_0, Z_0, \delta, F = \{q_1\})$$

mit der Übergangsrelation δ gemäß dem folgenden Automatengraphen:



Hinweis: Beim Lesen von Zeichen x im Zustand q_1 und Z_1 auf dem STACK geht der Automat $\mathcal{A}$ in einen nicht-akzeptierenden Fehlerzustand.

(a) Welches in der Vorlesung vorgestellte Berechnungsmodell erweitert ein Kellerautomat? Inwiefern ist ein Kellerautomat eine Spezialisierung einer NTM?

(b) Ist $\mathcal{A}$ deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

(d) Geben Sie die Sprache L_ε, die von $\mathcal{A}$ durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$

nicht kontextfrei ist, wobei $|w|_x$ die Häufigkeit des Zeichens x im Wort w bezeichne.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind. Die Spiegelung einer Sprache entsteht durch Spiegelung aller Wörter der Sprache, d.h. die Spiegelsprache L^R ist gegeben durch $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$. $w^R = w_k \cdots w_1$ bezeichne dabei das Spiegelwort von $w = w_1 \cdots w_k$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Die kontextfreie Grammatik G_1 über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ sei definiert durch die Menge der Nichtterminalsymbole $\{S, L, R\}$ mit dem Startsymbol S und folgenden Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} S &\to LR \mid L \mid R \\ L &\to \mathtt{a}L\mathtt{b} \mid \mathtt{ab} \\ R &\to \mathtt{b}R\mathtt{a} \mid \mathtt{ba} \end{aligned}$$

Geben Sie eine Grammatik G_2 in Greibach-Normalform an, sodass $L(G_2) = L(G_1)$ gilt.

Aufgabe 7 (5 + 1 = 6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Berechnungsmodell des Kellerautomaten kennengelernt. In dieser Aufgabe geht es darum, ein verwandtes Berechnungsmodell zu untersuchen. Ein *Schlangenautomat* entsteht aus einem Kellerautomaten, indem statt einem Kellerspeicher eine Warteschlange S verwendet wird. Die Warteschlange unterstützt zwei Operationen `push(`γ`)` und `pop`, die jeweils ein Zeichen γ *vorne* in S einfügen, beziehungsweise das *hinterste* Zeichen aus S entfernen.

(a) Wie mächtig sind deterministische Schlangenautomaten, d.h., welchen Typ von Sprachen können sie erkennen? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

(b) Sind deterministische Schlangenautomaten gleich mächtig wie nichtdeterministische Schlangenautomaten? Begründen Sie!

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ gegeben mit folgenden Häufigkeiten:

$$p(\sigma) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } \sigma = a, b \\ 2/9 & \text{für } \sigma = c \\ 1/9 & \text{für } \sigma = d \end{cases}$$

(a) Benutzen Sie die Huffmancodierung, um einen optimalen präfixfreien Code zu erhalten.

(b) Benutzen Sie die Huffmancodierung, um einen anderen optimalen präfixfreien Code als den aus Teilaufgabe (a) zu erhalten.

(c) Geben Sie einen optimalen präfixfreien Code an, der keiner Huffmancodierung entspricht.

Aufgabe 9 (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ gegeben, wobei für die Häufigkeiten $p(a) > p(b) > p(c) > p(d)$ gilt.

(a) Welche Codewortlängen $\{l_a, l_b, l_c, l_d\}$ sind für eine Huffmancodierung möglich?

(b) Angenommen es gilt $p(a) > p(b) + p(c)$. Was sind jetzt die möglichen Codewortlängen?

(c) Was ist der kleinste Wert ρ so dass aus $p(a) > \rho$ folgt, dass $l_a = 1$ ist? Beweisen Sie!