Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 6

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 17/18

Ausgabe 10. Januar 2018
Abgabe 23. Januar 2018, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1 (1 + 2 = 3 Punkte)

Betrachten Sie folgende Sprachen:

$$L_1 = \{\texttt{0}^n \texttt{1}^{2n} \texttt{2}^m \mid n, m \geq 0\}$$
$$L_2 = \{\texttt{0}^n \texttt{1}^m \texttt{2}^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

(a) Zeigen Sie, dass L_1 und L_2 kontextfrei sind.

(b) Ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist folgende kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b, c, d\}, \{A, B, C, D, E\}, A, R)$. Die Regelmenge R enthält folgende Regeln:

$$\begin{aligned} A &\to AB \mid EC \mid a \\ B &\to CA \\ C &\to CC \mid DC \mid c \\ D &\to d \\ E &\to CA \mid DA \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mittels des aus der Vorlesung bekannten CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = adcaca$ in $L(G)$ enthalten ist. Falls ja, geben Sie außerdem einen Syntaxbaum für die Ableitung von w an.

a	d	c	a	c	a

Aufgabe 3 (1+3+2 = 6 Punkte)

Sei eine Grammatik G durch $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{0, 1\}$ und folgende Regelmenge R gegeben:

$$S \to 0B \mid 1A$$
$$A \to 0 \mid 0S \mid 1AA$$
$$B \to 1 \mid 1S \mid 0BB$$

(a) Geben Sie eine zu G äquivalente kontextfreie Grammatik G' in Chomsky-Normalform an.

(b) Beweisen Sie[1], dass G die Sprache aller Wörter in $\{0, 1\}^+$ erzeugt, bei denen die Anzahl der Nullen gleich der Anzahl an Einsen ist.

(c) Geben Sie eine Grammatik G'' an für die $L(G'')$ die Sprache aller Wörter in $\{0, 1, 2\}^*$ für die die Anzahl der Nullen gleich die Anzahl der Einsen plus die Anzahl der Zweien ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie[2], dass es zu jeder Chomsky-1-Grammatik eine äquivalente Chomsky-1-Grammatik gibt,

[1] Vergleiche Vorlesung 13, Folie 28.
[2] Vergleiche Vorlesung 13, Folie 23.

bei der alle Regeln die Form

$$\begin{aligned} A &\to C \\ A &\to CD \\ AB &\to CD \\ A &\to a \\ S &\to \varepsilon \end{aligned}$$

haben, wobei jeweils $A, B \in V, C, D \in V \setminus \{S\}$ und $a \in \Sigma$.

Aufgabe 5 (3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1, G_2 \text{ kontextfreie Grammatiken mit } L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset\}$$

unentscheidbar ist, indem Sie das PKP auf L reduzieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1, G_2 \text{ rechtslineare Grammatiken mit } L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset\}$$

entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus beschreiben, der L entscheidet.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die regulären Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind.

Aufgabe 6 (2 + 4 = 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen den Sprachen der Klasse $\mathsf{NTAPE}(n)$ entsprechen[3], indem Sie in zwei Schritten vorgehen.

(a) Sei L eine kontextsensitive Sprache. Dann existiert eine nichtdeterministische Turingmaschine M, die L mit linearem Platzbedarf akzeptiert.

(b) Sei M eine nichtdeterministische Turingmaschine die die Sprache $L(M)$ mit linearem Platzbedarf akzeptiert. Dann existiert eine kontextsensitive Grammatik G, so dass gilt $L(G) = L(M)$.

Aufgabe 7 (2 + 2 + 1 + (2) = 5 + (2) Punkte)

Sei $L = \{\mathtt{a}^n \mid n \text{ ist Primzahl}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Typ von L höchstens Eins ist.

(b) Zeigen Sie, dass L von Typ Eins ist.

[3] Vergleiche Vorlesung 13, Folie 18.

(c) Welchen maximalen Typ hat die Sprache L^*? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

(d) Welchen Typ haben die Sprachen L^3 und L^6?

Bonusfrage für Interessierte, ohne Beweis. Bei dieser Aufgabe dürfen Sie gerne bekanntes (Un-)Wissen recherchieren und zitieren.