Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 5

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 17/18

Ausgabe 20. Dezember 2017
Abgabe 16. Januar 2018, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das TravelingSalesman-Problem stark NP-vollständig ist.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Aus Vorlesung und Übung kennen Sie das NP-vollständige Problem VertexCover:

> **Gegeben:** ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
> **Gesucht:** Menge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, sodass $\forall (u, v) \in E : u \in V' \vee v \in V'$.

(a) Ist das Problem in der oben gegebenen Formulierung ein Optimierungsproblem, ein Optimalwertproblem, oder ein Entscheidungsproblem? Geben Sie auch die beiden anderen Formulierungen an.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ergibt in dieser Form keinen Sinn, siehe unten.

Es soll eine approximative Lösung für das VertexCover Problem berechnet werden. Dazu wird zunächst $V' = \emptyset$ gesetzt. Solange G eine Kante enthält wird dann eine beliebige Kante $(u, v) \in E$ gewählt, beide Knoten u, v zu V' hinzugefügt und anschließend aus G entfernt. Um einen Knoten w aus G zu entfernen werden alle zu w inzidenten Kanten und w selbst entfernt.

(b) Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus tatsächlich ein VertexCover berechnet.

(c) Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus ein Approximationsalgorithmus für das VertexCover Problem mit einer relativen Gütegarantie von 2 ist. *Hinweis:* Die Menge der gewählten Kanten bildet ein Matching.

(d) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ kein Polynomialzeitapproximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie für das VertexCover Problem existiert.

Der Algorithmus soll angepasst werden, um eine approximative Lösung für das IndependentSet Problem zu finden.

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Gesucht: kardinalitätsmaximale Menge $V' \subseteq V$, für die aus $v \in V'$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ folgt, dass $u \notin V'$.

Dazu wird anstatt der Menge V' die Menge $V \setminus V'$ ausgegeben.

(e) Ist der so abgewandelte Algorithmus ein Approximationsalgorithmus für das Independent-Set Problem mit relativer Gütegarantie 2? Begründen Sie!

Aufgabe 3

(1 + 3 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben sei eine Grundmenge $S = \{1, \ldots, n\}$ und ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq 2^S$. Jede Menge $A \in \mathcal{C}$ enthalte maximal 3 Elemente, d.h. $|A| \leq 3$. Ein HittingSet für $\mathcal{C}$ ist eine Teilmenge $X \subseteq S$, so dass für jedes $A \in \mathcal{C}$ gilt $A \cap X \neq \emptyset$. Gesucht ist ein HittingSet minimaler Kardinalität, was ein NP-vollständiges Problem ist. Sie sollen deshalb nun versuchen, einen Approximationsalgorithmus zu entwickeln.

In einem ersten Versuch wählt man dazu immer aus einer noch nicht abgedeckten Menge ein beliebiges Element a und fügt es dem HittingSet hinzu. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 1: 3-HittingSet-Approximation, Versuch 1

```
Eingabe: S = {1,...,n}, C ⊆ 2^S mit |A| ≤ 3 für alle A ∈ C
Ausgabe: HittingSet X für C
X ← ∅;
solange C ≠ ∅ tue
    A ← wähle eine beliebige Menge A ∈ C ;
    a ← wähle ein beliebiges Element aus A;
    X ← X ∪ {a} ;
    C ← C \ {A ∈ C | A ∩ X ≠ ∅} ;
```

(a) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 kein Approximationsalgorithmus mit konstanter oder relativer Gütegarantie ist.

Im zweiten Versuch wird die Strategie auf eine Art und Weise angepasst, die vielleicht verschwenderisch erscheint. Anstatt nur ein Element a zu X hinzuzufügen, werden *alle* Elemente aus A zu X hinzugefügt. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 2: 3-HittingSet-Approximation

```
Eingabe: S = {1,...,n}, C ⊆ 2^S mit |A| ≤ 3 für alle A ∈ C
Ausgabe: HittingSet X für C
X ← ∅;
solange C ≠ ∅ tue
    A ← wähle eine Menge A ∈ C ;
    X ← X ∪ A ;
    C ← C \ {A ∈ C | A ∩ X ≠ ∅} ;
```

(b) Zeigen Sie, dass Algorithmus 2 ein 3-Approximationsalgorithmus ist, d.h. dass

$$\mathcal{A}(I) \leq 3 \cdot \mathrm{OPT}(I)$$

gilt. Hierbei sei I eine beliebige Instanz des Problems, $\mathcal{A}(I)$ die Kardinalität des von Algorithmus 2 zurückgegebenen HittingSets, sowie $\mathrm{OPT}(I)$ die Kardinalität einer optimalen Lösung.

(c) Zeigen Sie, dass die relative Gütegarantie von Algorithmus 2 nicht besser als 3 ist. Geben Sie dazu eine Familie von Mengensystemen $\mathcal{C}$ an, für die Algorithmus 2 ein HittingSet berechnet, dass dreimal so viele Elemente enthält wie eine optimale Lösung.

Aufgabe 4

(1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Problem. Gegeben sind m identische Maschinen $M = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und eine Menge von n Jobs $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$. Jede Maschine kann immer nur einen Job bearbeiten und jeder Job muss ohne Unterbrechung auf einer Maschine bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit von Job j ist gegeben durch $p_j \geq 0$ und ist unabhängig von der Maschine auf der j bearbeitet wird.

Gesucht ist eine Zuweisung der Jobs auf die Maschinen, so dass die Gesamtbearbeitungszeit minimiert wird. Ist beispielsweise jeder Maschine $i \in M$ die Jobmenge $J_i \subseteq J$ zugeordnet, so muss gelten, dass $J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m = J$ und $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ für $i \neq i'$. Die Gesamtbearbeitungszeit ist dann gegeben durch

$$\max_{i \in M} T_i \quad \text{wobei} \quad T_i = \sum_{j \in J_i} p_j.$$

Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus $\mathcal{A}$ um eine Zuweisung der Jobs auf Maschinen zu berechnen:

- Gehe durch die Jobs $j_1, \ldots, j_n$ in dieser Reihenfolge und weise den nächsten Job der Maschine zu, die momentan die geringste Bearbeitungszeit hat.

Betrachten Sie nun den Algorithmus $\tilde{\mathcal{A}}$ der wie $\mathcal{A}$ funktioniert, außer dass die Jobs anfangs nach nicht-aufsteigender Bearbeitungszeit sortiert werden.

- Sortiere die Jobs nach nicht-aufsteigender Bearbeitungszeit, d.h. $p_{j_1} \geq p_{j_2} \geq \cdots \geq p_{j_n}$.
- Gehe durch die Jobs $j_1, \ldots, j_n$ in dieser Reihenfolge und weise den nächsten Job der Maschine zu, die momentan die geringste Bearbeitungszeit hat.

Bezeichne T die Gesamtbearbeitungszeit in von $\mathcal{A}$ gefundenen Zuweisung, $\tilde{T}$ die Gesamtbearbeitungszeit der von $\tilde{\mathcal{A}}$ gefundenen Zuweisung und T^* die Gesamtbearbeitungszeit in einer optimalen Zuweisung.

(a) Beweisen Sie, dass $T^* \geq \max_{j \in J} p_j$ und $T^* \geq \frac{1}{m} \sum_{j \in J} p_j$.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie von höchstens 2 ist (d.h. $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq 2$).

Hinweis: Vergleichen Sie T mit den unteren Schranken an T^* aus a.

(c) Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ Instanzen für die gilt $T \geq (2 - \varepsilon)T^*$.

(d) Beweisen Sie, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie von höchstens 3/2 ist (d.h. $\mathcal{R}^{\infty}_{\tilde{\mathcal{A}}} \leq 3/2$).
Hinweis: Finden Sie eine weitere untere Schranke an T^* für den Fall dass $n > m$.

(e) Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ Instanzen für die gilt $\tilde{T} \geq (4/3 - \varepsilon)T^*$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\mathcal{R}^{\infty}_{\tilde{\mathcal{A}}} \leq 4/3$, also $\tilde{\mathcal{A}}$ ein 4/3-Approximationsalgorithmus ist, aber das müssen Sie hier nicht zeigen.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keinen polynomiellen Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie für MAX2SAT gibt, falls $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ gilt.

Aufgabe 6 (3 + 1 = 4 Punkte)

Sei p ein Polynom und Π ein NP-schweres Minimierungsproblem, sodass die Optimierungsfunktion f_Π des Problems ganzzahlig ist. Außerdem gelte für jede Instanz I, dass $\mathrm{OPT}_\Pi(I) < p(|I_u|)$, wobei I_u die unäre Kodierung von I bezeichnet.

Zeigen Sie

(a) Falls es für Π ein FPAS gibt, so gibt es auch einen pseudopolynomialen Algorithmus für Π.

(b) Unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ gibt es für ein stark NP-vollständiges Problem kein FPAS.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Wie jeden Dezember muss der Weihnachtsmann seinen Rentierschlitten mit Geschenken beladen. Jedes Geschenk ist quaderförmig, die Ladefläche des Schlittens ist rechtechtig mit festen Seitenlängen. Damit nichts zu Bruch kommt dürfen Geschenke prinzipiell nicht gestapelt werden. Außerdem dürfen die Geschenke nur achsenparallel auf dem Schlitten platziert werden. Da beim Rentierschlittentransport nur der Himmel die Grenze ist, dürfen die Geschenke beliebig hoch sein. Das Ziel ist es, alle Geschenke auf dem Schlitten unterzubringen.

Weil der Weihnachtsmann in den vergangenen Jahren viele Stunden damit verbracht hat, die Geschenke möglichst geschickt auf seinem Schlitten unterzubringen, würde er gerne ein effizientes (also Polynomialzeit-) Verfahren zum Geschenkeverladen entwickeln.

Zeigen Sie, dass das unter er Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ unmöglich ist.