Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 17/18

Ausgabe 07. November 2017
Abgabe 21. November 2017, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Bitte benutzen Sie den WebInScribe Deckblattgenerator:
`https://webinscribe.ira.uka.de/deckblatt/index.php?course=10649`

Aufgabe 1

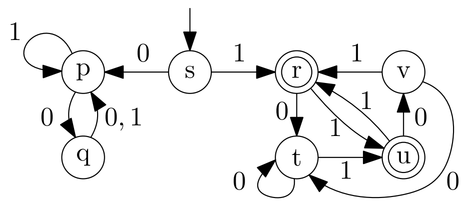
(1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, \delta, S, F)$ mit möglichst wenig Zuständen an, so dass für alle binär kodierten Quadratzahlen w gilt: $w \in L(\mathcal{A})$.

(b) Gegeben sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$\forall q \in Q : (\exists w_2 \in \Sigma^* : \delta(q, w_2) \cap F \neq \emptyset \implies \exists w_1 \in \Sigma^* : w_1 w_2 \in L(\mathcal{A}))$$

(c) Konstruieren Sei zu folgendem Automaten den zugehörigen Äquivalenzklassenautomaten.



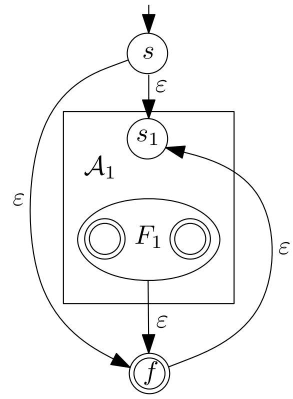
(d) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Äquivalenzklassenautomaten aus Teilaufgabe (c).

Aufgabe 2

(3 Punkte)

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede reguläre Sprache von einem deterministischen endlichen Automaten akzeptiert wird. Sei L_1 eine reguläre Sprache und $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ ein DEA, der L_1 akzeptiert. Um den NEA $\mathcal{A}$, der die Sprache L_1^* akzeptiert, zu konstruieren, wurde folgendermaßen vorgegangen.[1]

[1] Dieser NEA kann anschließend natürlich in einen DEA transformiert werden.



(a) Füge neue Zustände s, f zu $\mathcal{A}_1$ hinzu, wobei f akzeptierend ist.

(b) Füge ε-Übergänge $(s, s_1), (s, f), (f, s_1)$ und für alle $f_1 \in F_1$ den ε-Übergang (f_1, f) zu $\mathcal{A}_1$ hinzu.

In dieser Aufgabe geht es darum, wieso die neuen Zustände s, f benötigt werden. Betrachten Sie folgende alternative Konstruktion, die auf den ersten Blick möglicherweise intuitiver erscheint.

(a) Mache den Zustand s_1 akzeptierend (denn $\varepsilon \in L_1^*$).

(b) Füge für alle $f_1 \in F_1$ den ε-Übergang (f_1, s_1) zu $\mathcal{A}_1$ hinzu (damit auf ein akzeptiertes Wort wieder ein Wort folgen kann).

Diese Konstruktion ist leider nicht korrekt. Geben Sie eine Sprache L_1 zusammen mit einem akzeptierenden DEA $\mathcal{A}_1$ an, bei dem die zweite Konstruktion einen Automaten liefert, der nicht L_1^* akzeptiert. Begründen Sie, wieso dieser Automat nicht L_1^* akzeptiert!

Aufgabe 3 (2 + 1 = 3 Punkte)

Eine Sprache ist endlich, wenn sie nur endliche viele Wörter enthält. Eine Sprache ist koëndlich, wenn ihr Komplement endlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache L regulär ist, in dem Sie in wenigen Sätzen beschreiben, wie ein DEA konstruiert werden kann, der L akzeptiert.

(b) Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen sind, woraus direkt folgt, dass die koëndlichen Sprachen regulär sind.

Aufgabe 4 (1 + 1 + 3 + 3= 8 Punkte)

Ist das Pumping-Lemma für folgende Sprachen erfüllt? Ist die Sprache regulär? Begründen Sie!

(a) $\Sigma = \{\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{Z}\} \cup \{␣, -\} \cup \{0, \ldots, 9\}$, $L_a = \{$mögliches Autokennzeichen in Karlsruhe$\}$
Beispielsweise gilt KA–RT␣911 $\in L_a$, aber KA–RT–OFFEL $\notin L_a$.

(b) $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = |w|_c\}$

(c) $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid w = \mathrm{odd}(w) \cdot \mathrm{even}(w)\}$, wobei $\mathrm{odd}(w) = w_1, w_3, w_5, \ldots$ und $\mathrm{even}(w) = w_2, w_4, w_6, \ldots$ die Teilwörter von w auf allen ungeraden beziehungsweise allen geraden Stellen bezeichnen.
Beispielsweise gilt $w = 0110110110 \in L_c$, weil $\mathrm{odd}(w) = 01101$, $\mathrm{even}(w) = 10110$ und $w = 01101 \cdot 10110 = \mathrm{odd}(w) \cdot \mathrm{even}(w)$.

(d) $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid |\text{odd}(w)|_1, |\text{even}(w)|_1 \text{ gerade}\}$
Beispielsweise gilt $w = 011101110 \in L_d$, weil $\text{odd}(w) = 01010$ und $\text{even}(w) = 1111$ beide gerade vielen Einsen haben.

Aufgabe 5

(3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$ ein beliebiges endliches Alphabet bestehend aus natürlichen Zahlen. Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ ist demnach eine endliche Folge von Zahlen aus Σ. Sei L die Sprache all der Wörter die (als Zahlenfolge gesehen) schwach monoton aufsteigend sind. Formal gilt also für beliebiges $w \in \Sigma^*$

$$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad w_i \geq w_{i-1}, \forall i = 1, \ldots, |w|,$$

wobei w_i das i-te Symbol in w bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Nerode-Relation R_L zu L.

(b) Ist L regulär? Gilt das Pumping-Lemma für L?

(c) Konstruieren Sie für $\Sigma = \{3, 5, 9\}$ einen endlichen Automaten der L erkennt.

Aufgabe 6

(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

In Vorlesung und Übung wurde bereits die Intuition ausgenutzt, dass Automaten „nicht zählen können“. In dieser Aufgabe soll mit dem Satz von Nerode formal gezeigt werden, dass die Sprache aller Primzahlen

$$L = \{\mathtt{a}^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist.

(a) Sei p eine Primzahl und k eine positive natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $p + kn$ nicht prim ist.

(b) Seien p_1, p_2 Primzahlen mit $p_1 < p_2$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $p_1 + n(p_2 - p_1)$ prim ist, $p_2 + n(p_2 - p_1)$ aber nicht. *Hinweis: Wählen Sie n möglichst klein.*

(c) Zeigen Sie mit dem Satz von Nerode, dass L nicht regulär ist. Nutzen Sie aus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.[2]

[2] Eine kleine Beweisauswahl für Interessierte: `https://primes.utm.edu/notes/proofs/infinite/`