Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

# Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 17/18

**Ausgabe** 07. November 2017
**Abgabe** 21. November 2017, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Bitte benutzen Sie den WebInScribe Deckblattgenerator:
`https://webinscribe.ira.uka.de/deckblatt/index.php?course=10649`

## Aufgabe 1

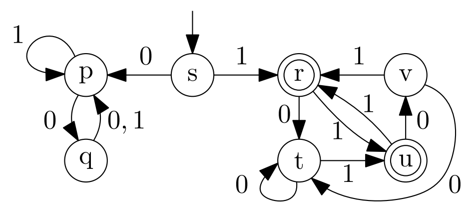
(1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, \delta, S, F)$ mit möglichst wenig Zuständen an, so dass für alle binär kodierten Quadratzahlen $w$ gilt: $w \in L(\mathcal{A})$.

(b) Gegeben sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$\forall q \in Q : (\exists w_2 \in \Sigma^* : \delta(q, w_2) \cap F \neq \emptyset \implies \exists w_1 \in \Sigma^* : w_1 w_2 \in L(\mathcal{A}))$$

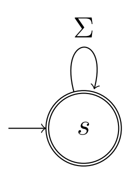
(c) Konstruieren Sei zu folgendem Automaten den zugehörigen Äquivalenzklassenautomaten.



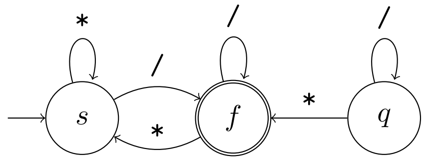

(d) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Äquivalenzklassenautomaten aus Teilaufgabe (c).

**Lösung:**

(a)




(b) Die Aussage ist falsch. Für den folgenden Automaten gilt $\delta(q, *) = F$, aber der Automat akzeptiert kein Wort, das mit $*$ endet.

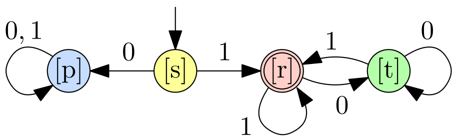



(c)

| Zeuge | Äquivalenzklassen |
|---|---|
| $\epsilon$ | $\{s,p,q,t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 0 | $\{s,p,q,t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 1 | $\{p,q\}$ , $\{s,t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 00 | $\{p,q\}$ , $\{s,t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 01 | $\{p,q\}$ , $\{s\}$ , $\{t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 10 | $\{p,q\}$ , $\{s\}$ , $\{t,v\}$ , $\{r,u\}$ |
| 11 | $\{p,q\}$ , $\{s\}$ , $\{t,v\}$ , $\{r,u\}$ |

Alle Wörter der Länge 3 trennen keine weiteren Äquivalenzklassen.

(d)



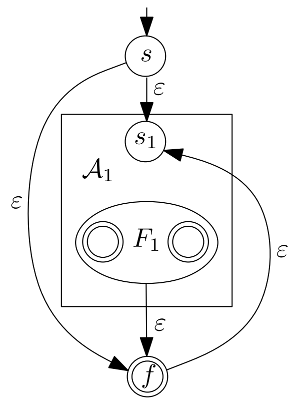

Bemerkung: Diese Automaten erkennen die Sprache aller Wörter aus $\{0,1\}^*$ deren erstes und letztes Zeichen eine 1 ist.

## Aufgabe 2 (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede reguläre Sprache von einem deterministischen endlichen Automaten akzeptiert wird. Sei $L_1$ eine reguläre Sprache und $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ ein DEA, der $L_1$ akzeptiert. Um den NEA $\mathcal{A}$, der die Sprache $L_1^*$ akzeptiert, zu konstruieren, wurde folgendermaßen vorgegangen.[1]

(a) Füge neue Zustände $s, f$ zu $\mathcal{A}_1$ hinzu, wobei $f$ akzeptierend ist.

(b) Füge $\varepsilon$-Übergänge $(s, s_1), (s, f), (f, s_1)$ und für alle $f_1 \in F_1$ den $\varepsilon$-Übergang $(f_1, f)$ zu $\mathcal{A}_1$ hinzu.




In dieser Aufgabe geht es darum, wieso die neuen Zustände $s, f$ benötigt werden. Betrachten Sie folgende alternative Konstruktion, die auf den ersten Blick möglicherweise intuitiver erscheint.

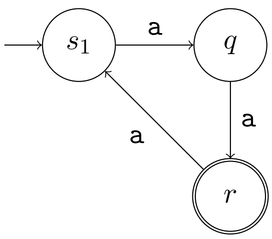
(a) Mache den Zustand $s_1$ akzeptierend (denn $\varepsilon \in L_1^*$).

[1]Dieser NEA kann anschließend natürlich in einen DEA transformiert werden.

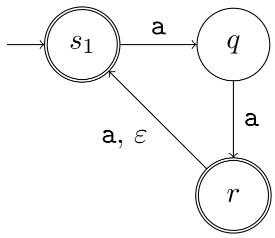
(b) Füge für alle $f_1 \in F_1$ den $\varepsilon$-Übergang $(f_1, s_1)$ zu $\mathcal{A}_1$ hinzu (damit auf ein akzeptiertes Wort wieder ein Wort folgen kann).

Diese Konstruktion ist leider nicht korrekt. Geben Sie eine Sprache $L_1$ zusammen mit einem akzeptierenden DEA $\mathcal{A}_1$ an, bei dem die zweite Konstruktion einen Automaten liefert, der nicht $L_1^*$ akzeptiert. Begründen Sie, wieso dieser Automat nicht $L_1^*$ akzeptiert!

**Lösung:**
Betrachte die Sprache $L_1 = \{\mathtt{aa}(\mathtt{aaa})^*\}$, die von folgendem DEA $\mathcal{A}_1$ akzeptiert wird. Insbesondere gilt $\mathtt{aaa} \notin L_1^*$. Mit der Konstruktionsvorschrift erhält man folgenden Automaten $\mathcal{A}_1'$. Dort gilt aber $\mathtt{aaa} \in L(\mathcal{A}_1')$.




Der ursprüngliche Automat $\mathcal{A}_1$.




Der konstruierte Automat $\mathcal{A}_1'$.

## Aufgabe 3

(2 + 1 = 3 Punkte)

Eine Sprache ist endlich, wenn sie nur endliche viele Wörter enthält. Eine Sprache ist koëndlich, wenn ihr Komplement endlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache $L$ regulär ist, in dem Sie in wenigen Sätzen beschreiben, wie ein DEA konstruiert werden kann, der $L$ akzeptiert.

(b) Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen sind, woraus direkt folgt, dass die koëndlichen Sprachen regulär sind.

**Lösung:**

(a) Beginne mit einem NEA mit nicht akzeptierendem Startzustand $s$. Füge für jedes der endlich vielen Wörter $w \in L$ eine „Zustandschlange“ ein, die genau $w$ akzeptiert, und einen $\varepsilon$-Übergang von $s$ zum Anfangszustand dieser Schlange. Nutze schließlich die Potenzmengenkonstruktion, um einen zum NEA äquivalenten DEA zu erhalten.

(b) Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann existiert ein DEA $\mathcal{A}$, der $L$ akzeptiert. Invertiere das Akzeptanzverhalten aller Zustände von $\mathcal{A}$ und nenne den neuen Automaten $\mathcal{A}^c$. Aufgrund des Determinismus akzeptiert $\mathcal{A}^c$ gerade $L^c$. Da DEAs genau die regulären Sprachen erkennen ist $L^c$ regulär.

## Aufgabe 4

(1 + 1 + 3 + 3= 8 Punkte)

Ist das Pumping-Lemma für folgende Sprachen erfüllt? Ist die Sprache regulär? Begründen Sie!

(a) $\Sigma = \{\text{A}, \dots, \text{Z}\} \cup \{\text{␣}, –\} \cup \{0, \dots, 9\}$, $L_a = \{\text{mögliches Autokennzeichen in Karlsruhe}\}$
Beispielsweise gilt KA–RT␣911 $\in L_a$, aber KA–RT–OFFEL $\notin L_a$.

(b) $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = |w|_c\}$

(c) $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid w = \text{odd}(w) \cdot \text{even}(w)\}$, wobei $\text{odd}(w) = w_1, w_3, w_5, \dots$ und $\text{even}(w) = w_2, w_4, w_6, \dots$ die Teilwörter von $w$ auf allen ungeraden beziehungsweise allen geraden Stellen bezeichnen.

Beispielsweise gilt $w = 0110110110 \in L_c$, weil $\text{odd}(w) = 01101$, $\text{even}(w) = 10110$ und $w = 01101 \cdot 10110 = \text{odd}(w) \cdot \text{even}(w)$.

(d) $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_d = \{w \in \Sigma^* \mid |\text{odd}(w)|_1, |\text{even}(w)|_1 \text{ gerade}\}$
Beispielsweise gilt $w = 011101110 \in L_d$, weil $\text{odd}(w) = 01010$ und $\text{even}(w) = 1111$ beide gerade vielen Einsen haben.

**Lösung:**

(a) Für alle Wörter der Länge $n > 10$ ist das Pumping-Lemma erfüllt, da die zugrunde liegende Menge leer ist. Die Sprache $L_a$ ist endlich und somit regulär.

(b) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma nicht erfüllt ist und somit $L_b$ nicht regulär sein kann.

**Beweis:** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Wir wählen $w = a^n b^n c^{n^2}$. Sei $w = uvx$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$. Dann gilt $u = a^i$, $v = a^j$ für Zahlen $i, j$ mit $i + j \leq n, j > 0$. Das Wort $uv^0x$ liegt nicht in $L_b$, da $|uv^0x|_a = |uvx|_a - j < n, |uv^0x|_b = n, |uv^0x|_c = n^2 \neq |uv^0x|_a \cdot |uv^0x|_b$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w$ in $L_b$ für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert.

(c) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma nicht erfüllt ist und somit $L_c$ nicht regulär sein kann. Dazu beobachten wir zunächst, dass für jedes Wort $z \in L_c$ gerade Länge $|z|$ und die Zerlegung $z = z'z''$ mit $|z'| = |z''| = |z|/2$ gilt

$$|\text{even}(z')|_1 + |\text{even}(z'')|_1 = |\text{even}(z)|_1 = |z''|_1 = |\text{odd}(z'')|_1 + |\text{even}(z'')|_1.$$

Es folgt dass $|\text{even}(z')|_1 = |\text{odd}(z'')|_1$. Analog gilt $|\text{odd}(z')|_1 = |\text{even}(z'')|_1$, und damit

$$|z'|_1 = |\text{odd}(z')|_1 + |\text{even}(z')|_1 = |\text{even}(z'')|_1 + |\text{odd}(z'')|_1 = |z''|_1.$$

Also haben alle Wörter aus $L_c$ gerader Länge genauso viele Einsen in der ersten Hälfte wie in der zweiten Hälfte. Wir zeigen nun dass diese Eigenschaft in der (mutmaßlichen) Zerlegung im Pumping-Lemma nicht erhalten bleibt.

**Beweis:** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Sei $2^k = n' \geq n$ eine Zweierpotenz. Wir wählen das Wort $w$ der Länge $2n' + 2$ mit

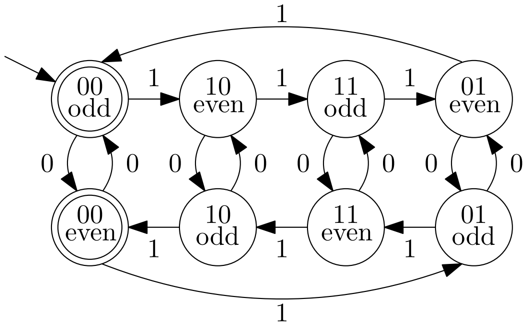
$$w_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i \in \{2^0 + 1, 2^1 + 1, \dots, 2^k + 1\} \cup \{2^0 + 2^k + 1, 2^1 + 2^k + 1, \dots, 2^k + 2^k + 1\}.$$

Man beobachtet dass $w = \text{odd}(w) \cdot \text{even}(w)$, also $w \in L_c$. Außerdem sehen wir dass das letzte Zeichen der ersten Hälfte von $w$ und das erste Zeichen der zweiten Hälfte von $w$ eine Eins ist.

Sei $w = uvx$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$. Dann hat $uv^0x$ mehr Einsen in der zweiten Hälfte als in der ersten Hälfte, insbesondere ist das Wort $uv^0x$ nicht in $L_c$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w$ in $L_c$ für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert.

(d) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma erfüllt ist. Sei $n = 10$ und $w \in L_d$ ein beliebiges aber festes Wort mit $|w| \geq n$. Für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ betrachte das Paar $(w'_k, w''_k)$ mit den Präfixen $w'_k$, $w''_k$ der ersten $k$ Zeichen aus $\mathrm{odd}(w)$ beziehungsweise $\mathrm{even}(w)$. Da es fünf Paare sind, gibt es zwei verschiedene Paare $(w'_{k_1}, w''_{k_1})$, $(w'_{k_2}, w''_{k_2})$ bei denen $|w'_{k_1}|_1$, $|w'_{k_2}|_1$ die gleiche Parität haben und $|w''_{k_1}|_1$, $|w''_{k_2}|_1$ die gleiche Parität haben. Sei o.B.d.A. $k_1 \leq k_2$. Sei nun $u$ der Präfix von $w$ auf den ersten $2k_1$ Zeichen, $v$ der Präfix von $w/u$ auf den ersten $2(k_2 - k_1)$ Zeichen und $x = w/uv$. Dann ist $uv^i x \in L_d$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Das Pumping-Lemma gilt also.

Wir konstruieren einen DEA der $L_d$ akzeptiert und zeigen somit das $L_d$ regulär ist:




## Aufgabe 5

(3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$ ein beliebiges endliches Alphabet bestehend aus natürlichen Zahlen. Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ ist demnach eine endliche Folge von Zahlen aus $\Sigma$. Sei $L$ die Sprache all der Wörter die (als Zahlenfolge gesehen) schwach monoton aufsteigend sind. Formal gilt also für beliebiges $w \in \Sigma^*$

$$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad w_i \geq w_{i-1}, \forall i = 1, \ldots, |w|,$$

wobei $w_i$ das $i$-te Symbol in $w$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $R_L$ zu $L$.

(b) Ist $L$ regulär? Gilt das Pumping-Lemma für $L$?

(c) Konstruieren Sie für $\Sigma = \{3, 5, 9\}$ einen endlichen Automaten der $L$ erkennt.

**Lösung:**

(a) Wir behaupten dass $R_L$ genau $|\Sigma| + 1$ Äquivalenzklassen hat.

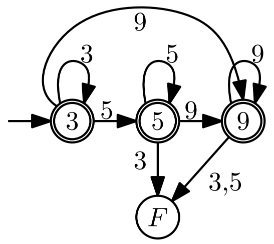
Zunächst sei $\mathcal{C}_0 = \Sigma^* \setminus L$ die Menge der Wörter die nicht in $L$ sind. Natürlich gilt für $w \in \mathcal{C}_0$, $x \in \Sigma^*$ dass $wx \in \mathcal{C}_0$, also $wx \notin L$. Das zeigt dass je zwei Wörter in $\mathcal{C}_0$ äquivalent sind.

Für $a \in \Sigma$ sei nun $\mathcal{C}_a = \{w \in L \mid w_{|w|} = a\}$ die Menge der Wörter in $L$ deren letztes Zeichen $a$ ist. Offenbar gilt für $v, w \in \mathcal{C}_a$, $x \in \Sigma^*$ dass $vx \in L$ genau dann wenn $wx \in L$. Also sind je zwei Wörter in $\mathcal{C}_a$ äquivalent. Zudem, wenn $a = \min(\Sigma)$ die kleinste Zahl in $\Sigma$ ist, gelten diese Behauptungen auch noch für $\mathcal{C}'_a = \mathcal{C}_a \cup \{\varepsilon\}$.

Desweiteren, wenn $v \in \mathcal{C}_a$, $w \in \mathcal{C}_b$, mit $a < b$, dann ist $x = a$ ein Zeuge für die Nichtäquivalenz von $v$ und $w$. Denn es gilt $vx = va \in L$ und $wx = uba \notin L$ für den Präfix $u$ von $w$ der Länge $|w| - 1$.

(b) Nach dem Satz von Nerode aus der Vorlesung ist $L$ genau dann regulär wenn $R_L$ endlichen Index hat. Oben haben wir gezeigt dass $\mathrm{ind}(R_L) = |\Sigma| + 1 < \infty$. Also ist $L$ regulär. Damit gilt auch das Pumping-Lemma für $L$.

(c)




## Aufgabe 6

(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

In Vorlesung und Übung wurde bereits die Intuition ausgenutzt, dass Automaten „nicht zählen können". In dieser Aufgabe soll mit dem Satz von Nerode formal gezeigt werden, dass die Sprache aller Primzahlen

$$L = \{\mathtt{a}^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist.

(a) Sei $p$ eine Primzahl und $k$ eine positive natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n$ gibt, so dass $p + kn$ nicht prim ist.

(b) Seien $p_1, p_2$ Primzahlen mit $p_1 < p_2$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n$ gibt, so dass $p_1 + n(p_2 - p_1)$ prim ist, $p_2 + n(p_2 - p_1)$ aber nicht. *Hinweis: Wählen Sie $n$ möglichst klein.*

(c) Zeigen Sie mit dem Satz von Nerode, dass $L$ nicht regulär ist. Nutzen Sie aus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.[2]

**Lösung:**

(a) Wähle $n = p$, dann gilt $p + kn = p + kp = p(1 + k)$.

(b) Sei $n$ die kleinste Zahl, so dass $p_2 + n(p_2 - p_1)$ nicht prim ist. Aus Teilaufgabe (a) ist bekannt, dass ein solches $n$ tatsächlich existiert. Wegen

$$p_1 + n(p_2 - p_1) = p_2 + (n - 1)(p_2 - p_1)$$

ist $p_1 + n(p_2 - p_1)$ prim.

(c) Wähle zwei beliebige Primzahlen $p_1 < p_2$. Aus Teilaufgabe (b) folgt, dass es eine Zahl $k$ gibt, so dass $p_1 + k$ prim ist, $p_2 + k$ aber nicht. Also bezeugt das Wort $\mathtt{a}^k$, dass $\mathtt{a}^{p_1}$ und $\mathtt{a}^{p_2}$ nicht in derselben Äquivalenzklasse liegen. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es unendlich viele Worte, die paarweise nicht in derselben Äquivalenzklasse liegen. Es muss also unendlich viele Äquivalenzklassen geben. Der Satz von Nerode besagt dann, dass $L$ nicht regulär ist.

[2] Eine kleine Beweisauswahl für Interessierte: `https://primes.utm.edu/notes/proofs/infinite/`