# 2. Klausur zur Vorlesung
# Theoretische Grundlagen der Informatik
# Wintersemester 2017/2018

**Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnummer anbringen**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

**Beachten Sie:**

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

| | Mögliche Punkte | | | | | Erreichte Punkte | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | c | d | Σ | a | b | c | d | Σ |
| Aufg. 1 | 3 | 5 | – | – | 8 | | | – | – | |
| Aufg. 2 | 4 | 2 | 4 | – | 10 | | | | – | |
| Aufg. 3 | 2 | 2 | 3 | – | 7 | | | | – | |
| Aufg. 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 10 | | | | | |
| Aufg. 5 | 6 | 3 | – | – | 9 | | | – | – | |
| Aufg. 6 | 2 | 6 | 2 | – | 10 | | | | – | |
| Aufg. 7 | $6 \times 1$ | | | | 6 | | | | | |
| Σ | | | | | 60 | | | | | |

## **Problem 1:** Reguläre Sprachen 3 + 5 = 8 Punkte

(a) Geben Sie einen vollständigen deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache

$$L = \{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid w \text{ endet mit } \texttt{101}\}$$

erkennt. Vervollständigen Sie dazu folgende Skizze ohne weitere Zustände zu verwenden.


(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid w \text{ enthält in der ersten Hälfte } \texttt{101}\}$$

nicht regulär ist. Die erste Hälfte eines Wortes $w$ ist das Teilwort mit den ersten $\lceil |w|/2 \rceil$ Zeichen.

## **Problem 2:** Kontextfreie Grammatiken $4 + 2 + 4 = 10$ Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C, D\}$, Startsymbol $S$ und Produktionen

$$\begin{aligned} R = \{S &\to CB \\ A &\to CD \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{d} \\ B &\to AC \mid \mathsf{b} \\ C &\to DA \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{c} \\ D &\to AB \mid \mathsf{d} \end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort dabdc in der Sprache $L(G)$ enthalten ist.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| d | a | b | d | c |

(b) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort dabdc an.

(c) Erweitern Sie den CYK-Algorithmus so, dass falls das überprüfte Wort tatsächlich von der Grammatik erzeugt wird, ein Ableitungsbaum ausgegeben wird.

## **Problem 3:** Entscheidbarkeit 2 + 2 + 3 = 7 Punkte

(a) Erläutern Sie in eigenen Worten die Begriffe *entscheidbar* und *rekursiv aufzählbar*.

Sei nun $L$ eine nicht-endliche Sprache über einem endlichen Alphabet $\Sigma$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $L$ entscheidbar ist, existiert eine berechenbare Bijektion zwischen $\Sigma^*$ und $L$.

(c) Zeigen Sie, dass es eine nicht-entscheidbare Sprache $L' \subseteq L$ gibt. Verwenden Sie nicht den Satz von Rice.

*Hinweis: Unterscheiden Sie zunächst die zwei Fälle, ob $L$ entscheidbar ist oder nicht.*

## **Problem 4:** Kellerautomaten $2 + 3 + 3 + 2 = 10$ Punkte

In Vorlesung und Übung wurden typischerweise *nichtdeterministische* Kellerautomaten betrachtet. Sei $\mathcal{A}$ nun ein *deterministischer* Kellerautomat, d.h. es gibt keine $\varepsilon$-Übergänge und für jedes Eingabesymbol ist der Übergang von $\mathcal{A}$ eindeutig definiert. Gehen Sie davon aus, dass das Eingabealphabet $\Sigma$ mindestens zwei Symbole enthält, dass $\mathcal{A}$ durch akzeptierende Zustände akzeptiert und dass der Stack von $\mathcal{A}$ niemals leer ist.

Definiere für solche deterministischen Kellerautomaten das Konzept der *Essenz* folgendermaßen. Für jedes Wort $w$ existiert ein[1] Wort $w'$, sodass der Stack nach Verarbeitung von $ww'$ für alle möglichen $w'$ die minimale Höhe hat. Ist nach Abarbeitung von $ww'$ die Höhe des Stacks $h$, so ist also für jedes Wort $v$ die Höhe des Stacks nach Abarbeitung von $ww'v$ mindestens $h$. Sei $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h$ der Inhalt des Stacks nach Abarbeitung von $ww'$. Das oberste Symbol auf dem Stack ist $\hat{\alpha} = \alpha_h$. Der aktuelle Zustand sei $q$. Bezeichne $(q, \hat{\alpha})$ als die *Essenz* von $w$.

(a) Zeigen Sie, dass es mindestens zwei unterschiedliche Wörter $w_1 \neq w_2$ mit der gleichen Länge und derselben Essenz gibt.

*Hinweis: Wie viele unterschiedliche Essenzen kann es höchstens geben?*

Erinnern Sie sich daran, dass die Konfiguration $(q, v, \alpha)$ eines Kellerautomaten aus den drei Teilen Zustand $q$, Teil der Eingabe $v \in \Sigma^*$, der noch nicht gelesen wurde, und dem Stackinhalt $\alpha \in \Gamma^*$ besteht.

(b) Seien $w_1, w_2$ Wörter mit derselben Essenz $(q, \hat{\alpha})$. Zeigen Sie, dass dann für jedes Wort $v \in \Sigma^*$ gilt

$$w_1 w_1' v \in L(\mathcal{A}) \iff w_2 w_2' v \in L(\mathcal{A}).$$

[1] Das Wort $w'$ ist nicht notwendigerweise eindeutig.

(c) Definieren Sie die Sprache, die genau aus allen Palindromen besteht. Nutzen Sie das Ergebnis der letzten Teilaufgabe, um zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ die Palindromsprache nicht erkennen kann.

(d) Bestimmen Sie das minimale $k$, sodass deterministische Kellerautomaten alle Sprachen von Typ-$k$ erkennen können. Begründen Sie kurz.

## **Problem 5:** NP-Vollständigkeit 6 + 3 = 9 Punkte

Das Entscheidungsproblem FREQUENCY ALLOCATION ist wie folgt definiert.

**Input:** endliche Menge $T$ von Transmittern
für jeden Transmitter $t \in T$ endliche Menge $F_t \subseteq \mathbb{N}$ von möglichen Frequenzen
eine Menge von Paaren von Transmittern, die interferieren

**Lösung:** für jeden Transmitter $t \in T$ eine Frequenz $f_t \in F_t$,
sodass je zwei interferierende Transmitter unterschiedliche Frenquenzen erhalten,
d.h. $f_{t_1} \neq f_{t_2}$ wenn $t_1$ und $t_2$ interferieren

Das Optimierungsproblem MAXIMUM FREQUENCY ALLOCATION ist wie folgt definiert.

**Input:** endliche Menge $T$ von Transmittern
für jeden Transmitter $t \in T$ endliche Menge $F_t \subseteq \mathbb{N}$ von möglichen Frequenzen
eine Menge von Paaren von Transmittern, die interferieren

**Lösung:** eine Teilmenge $S \subseteq T$ und für jeden Transmitter $t \in S$ eine Frequenz $f_t \in F_t$,
sodass je zwei interferierende Transmitter unterschiedliche Frenquenzen erhalten,
d.h. $f_{t_1} \neq f_{t_2}$ wenn $t_1$ und $t_2$ interferieren

**Ziel:** maximiere $|S|$ über alle Lösungen $S$

(a) Ist das Problem FREQUENCY ALLOCATION NP-vollständig? Beweisen Sie!

(b) Ist bekannt, ob das Problem MAXIMUM FREQUENCY ALLOCATION in polynomieller Laufzeit gelöst werden kann? Argumentieren Sie!

Jedes der folgenden Entscheidungsprobleme ist NP-vollständig.

TRAVELING SALESMAN

**Input:** Graph $G = (V, E)$
Längenfunktion $\ell : E \to \mathbb{R}$
Zahl $k \in \mathbb{N}$

**Lösung:** geschlossene Tour $T$ durch alle Knoten von $G$ mit Gesamtlänge höchstens $k$,
d.h. $\sum_{e \in T} \ell(e) \leq k$.

HAMILTONPFAD

**Input:** Graph $G = (V, E)$

**Lösung:** Pfad $P$ durch alle Knoten von $G$

CLIQUE

**Input:** Graph $G = (V, E)$
Zahl $k \in \mathbb{N}$

**Lösung:** Menge $U \subseteq V$ von mindestens $k$ Knoten, in der je zwei Knoten benachbart sind,
d.h. $|U| \geq k$ und für alle $u, v \in U$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.

COLOR

**Input:** Graph $G = (V, E)$
Zahl $k \in \mathbb{N}$

**Lösung:** Knotenfärbung mit höchstens $k$ Farben, in der keine gleichfarbigen Knoten benachbart sind,
d.h. $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ und für $i = 1, \ldots, k$ und alle $u, v \in V_i$ gilt $\{u, v\} \notin E$.

## **Problem 6:** Approximationsalgorithmen $2 + 6 + 2 = 10$ Punkte

Das Optimierungsproblem Maximum Cut ist wie folgt definiert.

**Input:** Graph $G = (V, E)$

**Lösung:** Zwei-Färbung der Knoten in rot und blau, d.h. jedes $v \in V$ bekommt genau eine Farbe in $\{\text{rot}, \text{blau}\}$

**Ziel:** maximiere die Anzahl der Kanten zwischen roten und blauen Knoten, d.h. maximiere $\#\{uv \in E \colon (u \text{ rot und } v \text{ blau}) \vee (u \text{ blau und } v \text{ rot})\}$

(a) Zeigen Sie, dass in jeder optimalen Lösung von Maximum Cut für jeden roten Knoten $v$ mindestens die Hälfte aller Nachbarn von $v$ blau sind.

(b) Zeigen Sie, dass der folgende Algorithmus $\mathcal{A}$ ein Approximationsalgorithmus für Maximum Cut mit einer relativen Gütegarantie von 2 ist:

- Färbe jeden Knoten beliebig; rot oder blau (zum Beispiel alle Knoten rot).
- Solange es einen Knoten $v \in V$ gibt, bei dem ein Umfärben von $v$ die Anzahl der Kanten zwischen roten und blauen Knoten erhöht, färbe solch einen Knoten $v$ um.

*Hinweis: Benutzen Sie eine triviale obere Schranke an $OPT(I)$.*

(c) Zeigen Sie, dass Algorithmus $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit hat.

*Hinweis: Betrachten Sie nach jedem Schleifendurchlauf den Wert der aktuellen Lösung.*

## **Problem 7:** Gemischtes 6 Punkte

Sind die folgenden Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils kurz. Ohne Begründung gibt es keine Punkte.

(a) Es ist nicht entscheidbar, ob eine gegebene Grammatik kontextsensitiv ist.

(b) Wenn eine reguläre Sprache $L$ ein Wort der Länge 12 und ein Wort der Länge 14 enthält, dann enthält $L$ auch ein Wort der Länge 13.

(c) Wenn $L_1$ und $L_2$ zwei $NP$-vollständige Sprachen sind, dann kann $L_1$ auf $L_2$ polynomiell reduziert werden.

(d) Ein polynomieller Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie 1 liefert stets optimale Lösungen.

(e) Die Laufzeit von deterministischen endlichen Automaten ist polynomiell in der Größe der Eingabe.

(f) Der Huffman-Code erkennt Einzelfehler.