# Theoretische Grundlagen der Informatik

## Vorlesung am 01. Dezember 2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Das Problem 3-SAT

**Problem 3-SAT**

**Gegeben:** Menge $U$ von Variablen
Menge $C$ von Klauseln über $U$
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

# Das Problem 3-SAT

**Problem 3-SAT**

**Gegeben:** Menge $U$ von Variablen
Menge $C$ von Klauseln über $U$
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

**Satz**:
Das Problem 3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

3SAT$\in \mathcal{NP}$:

- Für eine feste Wahrheitsbelegung $t$ kann in polynomialer Zeit $O(|C|)$ überprüft werden, ob $t$ alle Klauseln aus $C$ erfüllt.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Karlsruher Institut für Technologie

SAT $\propto$ 3SAT:

- Wir geben eine polynomiale Transformation $f$ von SAT zu 3SAT an.
- Gegeben sei eine SAT-Instanz $I$

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel $c$ in $I$ einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x$ aus **einem** Literal, so wird $c$ auf $x \vee x \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel $c = x \vee y$ aus **zwei** Literalen, so wird $c$ auf $x \vee y \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel $c$ aus **drei** Literalen, so wird $c$ auf sich selbst abgebildet.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel $c$ in $I$ einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ aus $k > 3$ Literalen, bilde $c$ wie folgt ab:
  - Führe $k - 3$ neue Variablen $y_{c,1}, \ldots, y_{c,k-3}$ ein.
  - Bilde $c$ auf die folgenden $k - 2$ Klauseln ab:

$$\begin{array}{r}
x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\
\overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\
\vdots \\
\overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\
\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k
\end{array}$$

- Diese Klauseln lassen sich in Zeit $\mathcal{O}(|C| \cdot |U|)$ konstruieren.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Noch zu zeigen:

- $I$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $f(I)$ ist erfüllbar

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

$I$ ist erfüllbar $\Rightarrow f(I)$ ist erfüllbar

- Sei die SAT-Instanz $I$ erfüllbar.
- Wir setzen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von $I$ auf $f(I)$ fort.
- Wir untersuchen jede Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in $I$ einzeln.
- Es ist mindestens ein $x_i$ `wahr`.
- Fall $k \leq 3$: Damit ist auch $f(c)$ `wahr`.
- Fall $k > 3$: Falls $x_1 = \texttt{wahr}$ oder $x_2 = \texttt{wahr}$ ist, setze

$$y_{c,j} \equiv \texttt{falsch}$$

sonst setze, für ein $i > 2$ mit $x_i = \texttt{wahr}$,

$$y_{c,j} = \begin{cases} \texttt{wahr} & \text{falls } 1 \leq j \leq i-2 \\ \texttt{falsch} & \text{falls } i-1 \leq j \leq k-3 \end{cases}$$

- Diese Erweiterung erfüllt alle Klauseln in $f(c)$.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

$I$ ist erfüllbar $\Leftarrow f(I)$ ist erfüllbar

- Wir zeigen: $I$ ist nicht erfüllbar $\Rightarrow f(I)$ ist nicht erfüllbar.
- Sei also die SAT-Instanz $I$ nicht erfüllbar.
- Wir betrachten eine beliebige Belegung der Variablen von $f(I)$.
- Da $I$ nicht erfüllbar ist, gibt es eine Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in $I$ bei der alle Literale $x_i$ auf `falsch` gesetzt sind.
- $c$ wird abgebildet auf

$$\begin{array}{rcl} x_1 \vee x_2 & \vee & y_{c,1} \\ \overline{y_{c,1}} \vee x_3 & \vee & y_{c,2} \\ & \vdots & \\ \overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} & \vee & y_{c,k-3} \\ \overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} & \vee & x_k \end{array}$$

- Um $f(c)$ zu erfüllen, müßten alle $y_{c,j}$ `wahr` sein.
- Dann ist die letzte Klausel $\overline{y_{c_{k-3}}} \vee x_{k-1} \vee x_k$ nicht erfüllt.
- Also ist die 3SAT–Instanz $f(I)$ nicht erfüllbar.

# Das Problem 2SAT

**Problem 2SAT**

**Gegeben:** Menge $U$ von Variablen
Menge $C$ von Klauseln über $U$
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für $C$?

**Satz**:
Das Problem 2SAT liegt in $\mathcal{P}$.

Beweis: Übung

# Das Problem MAX2SAT

**Problem MAX2SAT**

**Gegeben:** Menge $U$ von Variablen
Menge $C$ von Klauseln über $U$
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält
Zahl $K \in \mathbb{N}$

**Frage:** Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens $K$ Klauseln erfüllt?

**Satz**:
Das Problem MAX2SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

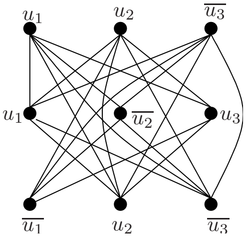
Beweis: Übung

# Das Problem CLIQUE

Eine **Clique** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $V^{'} \subseteq V$ so, dass für alle $i, j \in V^{'}$, $i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$.

**Problem CLIQUE**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \leq |V|$
**Frage:** Gibt es in $G$ eine Clique der Größe mindestens $K$?



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

**Satz**:
Das Problem CLIQUE ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
Beweis: Übung.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT $\propto$ CLIQUE

- Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine 3SAT-Instanz mit $c_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3}$ und $x_{ij} \in \{u_1, \ldots, u_m, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}\}$.

Wir transformieren $C$ in eine CLIQUE-Instanz $(G = (V, E), K)$ .

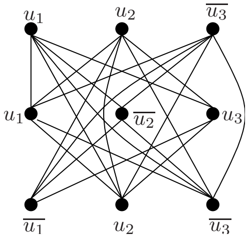
- $V$ enthält $3n$ Knoten $v_{ij}$ für $1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq 3$.
- $v_{ij}$ und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus $E$ verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)
- Wir setzen $K := n$

# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- $V$ enthält $3n$ Knoten $v_{ij}$ für $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3$.
- $v_{ij}$ und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus $E$ verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)

**Beispiel:** Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

| Knotennummer | $v_{11}$ | $v_{12}$ | $v_{13}$ | $v_{21}$ | $v_{22}$ | $v_{23}$ | $v_{31}$ | $v_{32}$ | $v_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Literal | $u_1$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$ | $u_1$ | $\overline{u_2}$ | $u_3$ | $\overline{u_1}$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$. |



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- Die Transformation kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Noch zu zeigen:

- 3SAT-Instanz $C$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ CLIQUE-Instanz $(G, K)$ ist erfüllbar

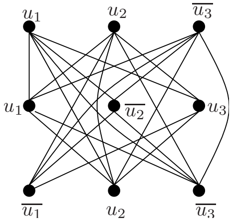
# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT-Instanz $C$ ist erfüllbar $\Rightarrow$ CLIQUE-Instanz $(G, K)$ ist erfüllbar:

- Wähle eine beliebige erfüllende Wahrheitsbelegung von $C$.
- Wähle in jeder Klausel ein wahres Literal.
- Die entsprechenden Knoten in $G$ bilden eine Clique der Größe $n$.

**Beispiel:** Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

| Knotennummer | $v_{11}$ | $v_{12}$ | $v_{13}$ | $v_{21}$ | $v_{22}$ | $v_{23}$ | $v_{31}$ | $v_{32}$ | $v_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Literal | $u_1$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$ | $u_1$ | $\overline{u_2}$ | $u_3$ | $\overline{u_1}$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$. |



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

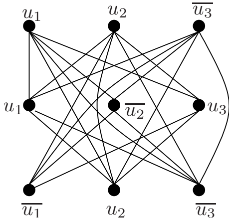
3SAT-Instanz $C$ ist erfüllbar $\Leftarrow$ CLIQUE-Instanz $(G, K)$ ist erfüllbar:

- Wähle eine Clique $V'$ der Größe $n$ in $G$.
- Die entsprechenden Literale sind
  - gleichzeitig erfüllbar
  - decken alle Klauseln ab

  und induzieren deswegen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von $C$.

**Beispiel:** Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

| Knotennummer | $v_{11}$ | $v_{12}$ | $v_{13}$ | $v_{21}$ | $v_{22}$ | $v_{23}$ | $v_{31}$ | $v_{32}$ | $v_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Literal | $u_1$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$ | $u_1$ | $\overline{u_2}$ | $u_3$ | $\overline{u_1}$ | $u_2$ | $\overline{u_3}$. |



# Das Problem COLOR

**Problem COLOR**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \in \mathbb{N}$.

**Frage:** Gibt es eine Knotenfärbung von $G$ mit höchstens $K$ Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

3COLOR bezeichnet das Problem COLOR mit festem Parameter $k = 3$.

**Satz**:
Das Problem 3COLOR ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

3COLOR $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Zeit $\mathcal{O}(|E|)$ überprüft werden, ob eine Färbung von Graph $G = (V, E)$ mit drei Farben zulässig ist.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

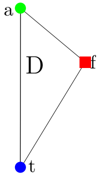
3SAT $\propto$ 3COLOR

- Sei $I$ eine 3SAT-Instanz mit Variablen $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ und Klauseln $\{c_1, \dots, c_n\}$.
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine 3COLOR-Instanz $G$.
- Es soll gelten: $I$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ G ist 3-färbbar.

# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph $G$ enthält:

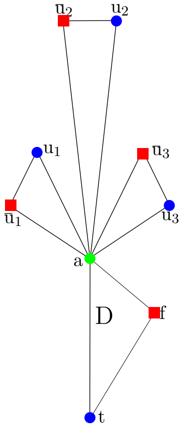
- Ein ‘Hauptdreieck’ aus Knoten {t, f, a} und Kanten {{t, f}, {f, a}, {t, a}}
- Interpretation: t, f, a sind die drei Farben mit denen $G$ gefärbt wird.
- Interpretation: t: `wahr`, f: `falsch`



# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph $G$ enthält:

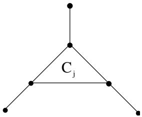
- Für jede Variable $u \in U$ ein Dreieck $D_u$ mit Eckknoten $u, \overline{u}, a$.
- Interpretation: Falls $u$ mit $t$ gefärbt ist, muss $\overline{u}$ mit f gefärbt sein.



# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph $G$ enthält für jede Klausel $c_j = x \vee y \vee z$ eine Komponente $C_j$ wie folgt:

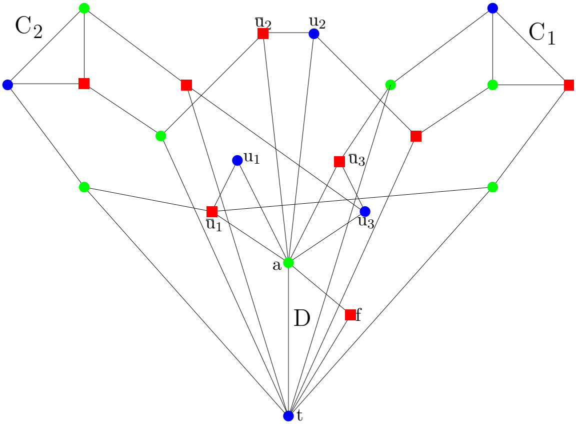
- $C_j$ besteht aus sechs Knoten: einem „inneren Dreieck“ und drei „Satelliten“.




- Jeder der drei Satelliten wird mit einem der Literale $x$, $y$, $z$ verbunden.
- Alle drei Satelliten werden mit dem Eckknoten $t$ in $D$ verbunden.

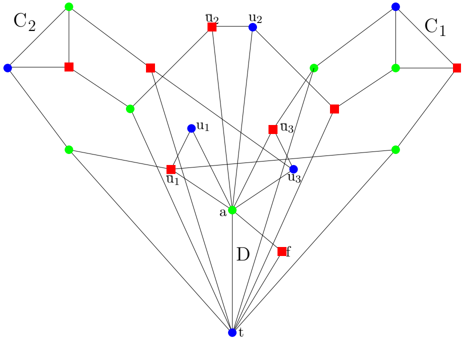
# Beispielgraph zur Reduktion

$c_1 = \bar{u}_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3,\ c_2 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3$



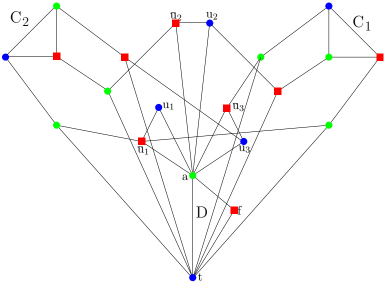
# Polynomialität der Reduktion

- Die Knotenanzahl von $G$ liegt in $\mathcal{O}(n+m)$.
- Deswegen ist die Transformation polynomial.



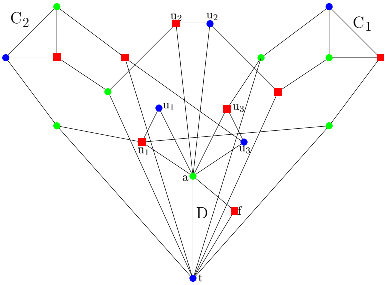
# Instanz I erfüllbar ⇒ Instanz G erfüllbar

- Betrachte zulässige Wahrheitsbelegung für *I*.
- Färbe wahre Literale mit t, falsche Literale mit f.
- Im Klausel-Gadget:
  - Färbe Satelliten zu einem beliebigen wahren Literal mit f.
  - Färbe die beiden anderen Satelliten mit a.
  - Inneres Dreieck kann dann zulässig gefärbt werden.



# Instanz I erfüllbar $\Leftarrow$ Instanz G erfüllbar

- Betrachte Dreifärbung von $G$.
- Färbung von Literal-Knoten induziert eine gültige Wahrheitsbelegung von $I$.



# Das Problem EXACT COVER

**Problem EXACT COVER**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $X$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X$.

**Frage:** Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus $X$ in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

# Das Problem EXACT COVER

**Problem EXACT COVER**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $X$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X$.

**Frage:** Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus $X$ in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, \ldots, 7\} \\ \mathcal{S} &= \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \\ &\quad \{5,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\} \end{aligned}$$

Ist $(X, \mathcal{S})$ eine Ja-Instanz?

# Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

**Problem EXACT COVER**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $X$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X$.

**Frage:** Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus $X$ in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, \ldots, 7\} \\ \mathcal{S} &= \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \\ &\quad \{5,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\} \\ \mathcal{S}' &= \{\{1,5\}, \{2,3,4\}, \{6,7\}\} \end{aligned}$$

Ja.

# Das Problem EXACT COVER

**Problem EXACT COVER**

**Gegeben:** Eine endliche Menge $X$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X$.

**Frage:** Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus $X$ in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

**Satz**:
Problem EXACT COVER ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

EXACT COVER $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ aus disjunkten Mengen besteht und $X$ überdeckt.

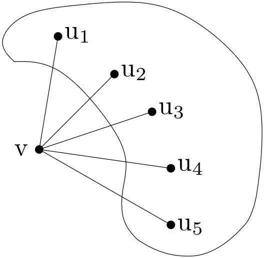
# Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

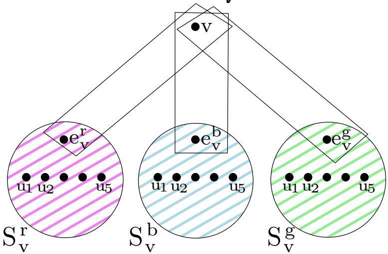
3COLOR $\propto$ EXACT COVER

- Sei $G = (V, E)$ eine 3COLOR-Instanz.
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine EXACT COVER-Instanz $(X, \mathcal{S})$.
- Es soll gelten: G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

# Konstruktion von (X,S)

- Sei $C = \{r(\text{ot}), b(\text{lau}), g(\text{rün})\}$
- Sei $N(v) := \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ die Nachbarschaft von $v$.
- Für jedes $v \in V$ enthalte $X$ ein „Element“ $v$ und jeweils $3 \cdot |N(v)| + 3$ zusätzliche Elemente.
- Zu jedem $v \in V$ gebe es in $\mathcal{S}$ drei disjunkte Mengen $S_v^r, S_v^b, S_v^g$ mit jeweils $|N(v)| + 1$ Elementen.
- Außerdem enthalte $\mathcal{S}$ für jedes $v$ drei zweielementige Mengen $\{v, e_v^r\}, \{v, e_v^b\}$ und $\{v, e_v^g\}$ mit $e_v^r \in S_v^r$, $e_v^b \in S_v^b$ und $e_v^g \in S_v^g$.
- **Interpretation:** $S_v^r$ entspricht der „Farbe“ $r$, enthält für jeden Knoten aus $N(v)$ eine Kopie und einen zusätzlichen Knoten $e_v^r$.

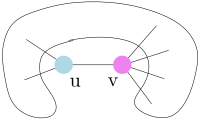


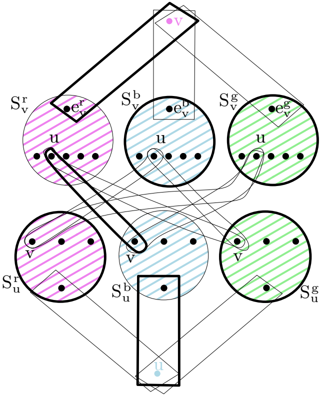



# Konstruktion von (X,S)



- Außerdem enthält $\mathcal{S}$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und je zwei $c, c' \in C$, $c \neq c'$, die zweielementigen Mengen $\{u_v^c, v_u^{c'}\}$, $u_v^c \in S_v^c$ „Kopie“ von $u$, $v_u^{c'} \in S_u^{c'}$ „Kopie“ von $v$.



# Konstruktion von (X,S)

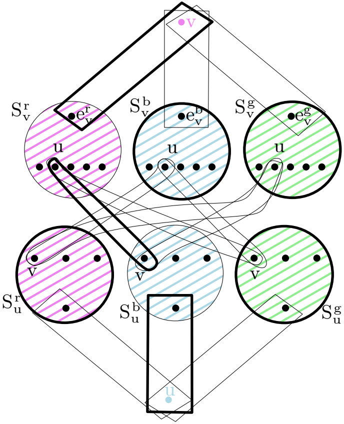
- Die Konstruktion ist polynomial.

Noch zu zeigen:

- G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow (X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

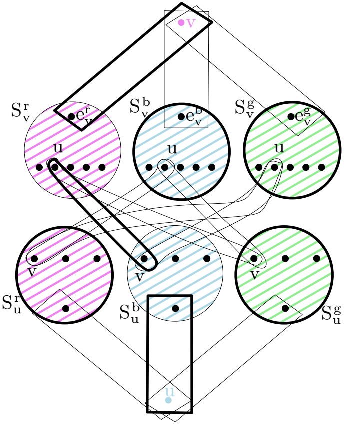
# G dreifärbbar $\Rightarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei $\chi : V \to C$ eine zulässige Dreifärbung.
- $\mathcal{S}'$ enthalte für jedes $v \in V$ die Mengen $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und $S_v^c$ mit $c \neq \chi(v)$.
- Diese Mengen überdecken alle Elemente exakt, außer den Elementen der Form $u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}$ für $\{u, v\} \in E$.
- Daher enthalte $\mathcal{S}'$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Menge $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$.
- Diese Menge existiert, da $\chi(u) \neq \chi(v)$, und damit überdeckt $\mathcal{S}'$ jedes Element aus $X$ genau einmal.



# G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei also $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung.
- Jedes Element $v$ muss von genau einer Menge der Form $\{v, e_v^c\}$ überdeckt sein.
- Dies induziert eine Färbung $\chi$ von $G$ mit den Farben $r$, $b$ und $g$.
- Wir müssen beweisen, dass diese Färbung zulässig ist
- Da für jedes $v$ bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann $e_v^c$ mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge $S_v^c$ überdeckt werden.



# G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Da für jedes $v$ bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann $e_v^c$ mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge $S_v^c$ überdeckt werden.
- Da die Mengen der Form $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und $S_v^c$, $c \neq \chi(v)$, alle Elemente außer den $u_v^{\chi(v)}$ mit $\{u, v\} \in E$ überdecken, müssen auch die Mengen $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$ für $\{u, v\} \in E$ in $\mathcal{S}'$ enthalten sein.
- Für diese gilt per Konstruktion $\chi(v) \neq \chi(u)$.